

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI  
BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Matematica

**COSTRUZIONE E UNICITÀ  
DEI  
FIBRATI DI HOPF**

**Relatore:**  
**Prof.ssa**  
**ALESSIA CATTABRIGA**

**Presentata da:**  
**CHIARA MANTOVANI**

**Anno Accademico 2018/2019**

# Introduzione

Con l'espressione *fibrato di Hopf* si intende tipicamente una particolare mappa, studiata per la prima volta dal matematico tedesco Heinz Hopf in un articolo del 1931, dalla sfera tridimensionale  $S^3$  alla sfera  $S^2$ , tale per cui la controimmagine di ogni punto risulta essere una circonferenza in  $S^3$ . In particolare essa conferisce ad  $S^3$  la struttura di fibrato su  $S^2$ , con fibra  $S^1$ . Tale mappa ha importanti applicazioni sia in topologia algebrica (permette ad esempio di mostrare che i gruppi di omotopia superiore delle sfere  $\pi_k(S^n)$  non sono necessariamente banali per  $k > n$ ), sia in ambiti apparentemente più distanti quali la meccanica quantistica e la fisica delle particelle.

Una caratteristica peculiare di tale fibrato è quella di avere fibra, spazio base e spazio totale tutti costituiti da sfere. Alcuni risultati sulla coomologia dei fibrati hanno permesso, insieme ad un teorema dimostrato nel 1960 dal matematico inglese James Adams, di mostrare che vi sono solo altri tre casi di fibrati, anch'essi noti come fibrati di Hopf, che manifestano la stessa particolarità, costituiti da mappe:

1.  $S^1 \rightarrow S^1$  con fibra  $S^0$ ;
2.  $S^7 \rightarrow S^4$  con fibra  $S^3$ ;
3.  $S^{15} \rightarrow S^8$  con fibra  $S^7$ .

Mentre la prima risulta essere banalmente una proiezione di rivestimento, la costruzione della seconda e della terza mappa, pur seguendo un procedimento

analogo a quello necessario per la definizione del fibrato di Hopf per eccellenza, richiede l'utilizzo di alcuni risultati sulle star-algebre (in particolare sull'algebra dei quaternioni e su quella degli ottonioni), che verranno trattati nell'appendice A.

Nel primo capitolo si daranno la definizione e qualche esempio classico di fibrato, per poi descrivere la costruzione delle quattro mappe sopra citate. Ci si soffermerà poi sul fibrato  $S^3 \rightarrow S^2$ , mettendolo in relazione con le rotazioni di  $\mathbb{R}^3$  e dando una descrizione della struttura delle sue fibre.

Il secondo capitolo sarà dedicato allo studio di alcuni risultati sulla coomologia dei fibrati, utilizzati poi per mostrare una condizione necessaria sulle dimensioni di fibra, spazio totale e spazio base in un fibrato in cui tali spazi sono tutti costituiti da sfere.

Nel terzo capitolo si introdurrà un invariante d'omotopia, noto come invariante di Hopf, e lo si calcolerà nel caso particolare di un fibrato in cui tutti gli spazi coinvolti sono sfere. Si enuncerà poi il teorema di Adams per concludere che le quattro mappe descritte sono le uniche in cui tale condizione si verifica. Si darà infine una traccia della dimostrazione di tale risultato.

I prerequisiti necessari alla lettura e comprensione di questa tesi sono la definizione di coomologia singolare e alcuni dei principali risultati su di essa, oltre ai concetti basilari della topologia. Si utilizzeranno in particolare le successioni esatte lunghe di coomologia di una coppia e di Mayer-Vietoris, il teorema di escissione e il lemma dei cinque, per cui si rimanda a [Hat09].

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>Elenco delle figure</b>	<b>v</b>
<b>1 Costruzione dei fibrati di Hopf</b>	<b>1</b>
1.1 Fibrati: definizioni ed esempi . . . . .	1
1.2 Fibrati di Hopf . . . . .	5
1.3 Fibrato di Hopf e rotazioni di $\mathbb{R}^3$ : la struttura delle fibre . . .	8
<b>2 Coomologia di fibrati</b>	<b>15</b>
2.1 Il Teorema di Leray-Hirsch . . . . .	16
2.2 La successione di Gysin . . . . .	21
2.3 Le dimensioni nei fibrati di Hopf: una condizione necessaria .	29
<b>3 Invariante di Hopf e unicità dei fibrati</b>	<b>33</b>
3.1 L'invariante di Hopf . . . . .	33
3.2 Il Teorema di Adams . . . . .	36
<b>A Star-algebre</b>	<b>41</b>
A.1 Definizioni e proprietà . . . . .	41
A.2 I quaternioni . . . . .	42
A.3 Dai quaternioni agli ottonioni: la costruzione di Cayley-Dickinson	44



# Elenco delle figure

1.1	il nastro di Moebius come fibrato. . . . .	2
1.2	Il fibrato tangente a una circonferenza (immagine tratta da [Wik19]). . . . .	3
1.3	Rotazioni $R_1$ e $R_2$ che mandano $A$ in $B$ . . . . .	11
1.4	Hopf link. . . . .	12



# Capitolo 1

## Costruzione dei fibrati di Hopf

### 1.1 Fibrati: definizioni ed esempi

In questo capitolo si daranno la definizione e qualche esempio classico di fibrato, per poi descrivere la costruzione dei quattro fibrati di Hopf. Ci soffermeremo poi sul fibrato  $S^3 \rightarrow S^2$ , mettendolo in relazione con le rotazioni di  $\mathbb{R}^3$  e dando una descrizione della struttura delle sue fibre. I contenuti descritti in questo capitolo si trovano in [Ber09], [Hat09], [Lyo03], [Wik19].

**Definizione 1.1.1.** Si dice che uno spazio topologico  $E$  ha una struttura di **fibrato**, con *fibra*  $F$ , se esistono uno spazio  $B$  e una mappa  $p : E \rightarrow B$  tali che  $\forall x \in B, \exists U$  intorno di  $x$ , detto *aperto banalizzante*, e  $\exists h : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  omeomorfismo che rendano commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{h} & U \times F \\ & \searrow p & \downarrow \pi_U \\ & & U \end{array} \quad ,$$

dove  $\pi_U$  è la proiezione sul primo fattore:  $(u, f) \mapsto u$  per  $(u, f) \in U \times F$ . Per indicare un fibrato si userà la notazione:  $F \rightarrow E \rightarrow B$ , inoltre si chiameranno  $B$  *spazio base*,  $E$  *spazio totale*,  $p$  *mappa di proiezione* e  $h$  *banalizzazione locale*.



**Osservazione 1.1.1.** Un prodotto cartesiano  $F \times U$  ha chiaramente la struttura di fibrato  $F \times U \xrightarrow{\pi_U} U$  o in modo analogo  $F \times U \xrightarrow{\pi_F} F$  con la mappa di proiezione data dalla proiezione sul secondo o sul primo fattore. Localmente, un fibrato ha la struttura di un prodotto cartesiano, in quanto la mappa  $h$  manda omeomorficamente la fibra  $F_b = p^{-1}(b)$  in  $\{b\} \times F$ . Tuttavia la struttura di prodotto non è necessariamente globale.

**Esempio 1.1.1.** Un esempio di fibrato che non ha una struttura globale di prodotto cartesiano è dato dal *nastro di Moebius*. Esso è infatti omeomorfo allo spazio  $E$  ottenuto come quoziente di  $I \times [-1, 1]$  tramite la relazione di equivalenza  $(0, v) \sim (1, -v)$ , con  $I = [0, 1]$ ; la mappa  $p : E \rightarrow S^1$  indotta sul quoziente dalla proiezione  $I \times [-1, 1] \rightarrow I$  dà ad  $E$  la struttura di fibrato, con fibra  $[-1, 1]$ , come illustrato nella Figura 1.1.

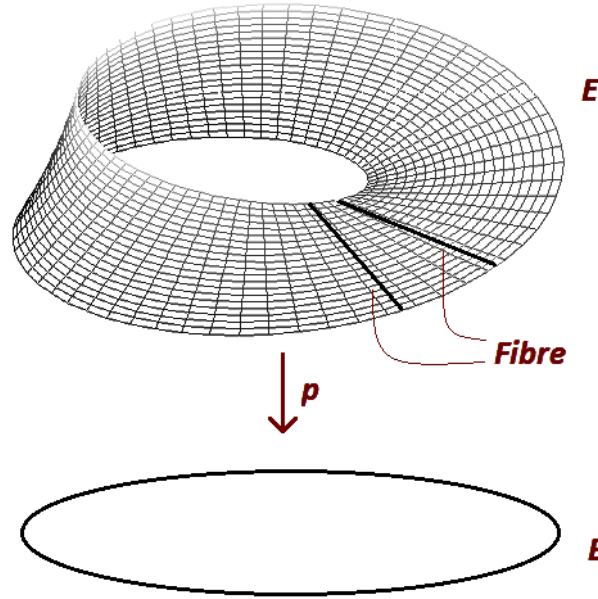


Figura 1.1: il nastro di Moebius come fibrato.

**Esempio 1.1.2.** Un ulteriore esempio di fibrato non banale è dato dal *fibrato tangente* a una varietà. Presa una  $n$ -varietà differenziabile  $B$  come spazio base, lo spazio tangente a  $B$  in  $x$  è l'insieme di tutti i vettori tangenti a curve

in  $B$  passanti per  $x$  ed ha la struttura di spazio vettoriale  $n$ -dimensionale. Si consideri lo spazio totale  $E$  formato dall'unione disgiunta degli spazi tangenti a  $B$  in ogni suo punto. Lo spazio totale può essere visto come l'insieme delle coppie  $(x, v)$ , con  $x \in B$  e  $v$  vettore tangente a  $B$  in  $x$ . La mappa  $p : E \rightarrow B$  tale che  $p(x, v) = x$  per ogni  $(x, v) \in E$  conferisce ad  $E$  la struttura di fibrato su  $B$ . La fibra  $p^{-1}(x)$  è lo spazio tangente a  $B$  in  $x$ . In Figura 1.2 è rappresentato schematicamente il caso di  $B = S^1$ .

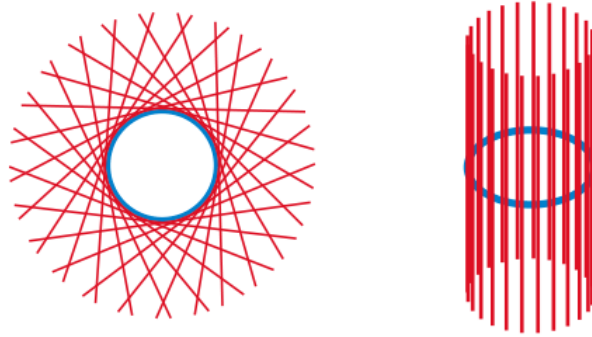


Figura 1.2: Il fibrato tangente a una circonferenza (immagine tratta da [Wik19]).

**Definizione 1.1.2.** Si chiama **proiezione di rivestimento** una mappa  $p : Y \rightarrow Z$  con la proprietà che  $\forall z \in Z$  esiste un intorno aperto  $V$  di  $z$  la cui controimmagine sia unione disgiunta di aperti di  $Y$ , tali che la restrizione di  $p$  a ciascuno di essi sia un omeomorfismo su  $U$ .

**Osservazione 1.1.2.** Una proiezione di rivestimento in cui le fibre hanno tutte la stessa cardinalità è un fibrato. Viceversa un fibrato la cui fibra sia uno spazio discreto risulta essere una proiezione di rivestimento.

**Definizione 1.1.3.** Si dice **fibrato in sfere** un fibrato in cui la fibra  $F$  sia una sfera  $S^n$  per qualche  $n \in \mathbb{N}$ .

Si dice **fibrato in dischi** un fibrato in cui la fibra  $F$  sia in disco  $D^n$  per qualche  $n \in \mathbb{N}$ .

Diamo ora la definizione di una particolare tipologia di spazio topologico, detto CW-complesso, che risulta necessaria sia per enunciare la Proposizione 1.1.4, per la dimostrazione della quale si rimanda a [Hat09], sia nei risultati dei capitoli successivi.

**Definizione 1.1.4.** Un **CW-complesso** è costituito da uno spazio topologico  $X$  e, per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , da insiemi di mappe  $\phi_i^k : D^k \rightarrow X$  con  $i \in A_k$ , opportuno insieme di indici, tali che:

1.  $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \in A_k} \phi_i^k(D^k)$ ;
2.  $\phi_i^k(\text{int}(D^k)) \cap \phi_j^h(\text{int}(D^h)) \neq \emptyset \implies k = h \text{ e } i = j$ ;
3. per ogni  $k > 0$  e per ogni  $i \in A_k$  si ha che  $\phi_i^k|_{\text{int}(D^k)}$  è un omeomorfismo sull'immagine;
4. posto  $X^q := \bigcup_{0 \leq k \leq q} \bigcup_{i \in A_k} \phi_i^k(D^k)$ , si ha che  $\phi_i^h(\partial D^h) \subset X^{h-1}$  per ogni  $h \in \mathbb{N}$  e per ogni  $i \in A_h$ ;
5. un sottospazio  $Y \subset X$  è chiuso  $\iff (\phi_i^k)^{-1}(Y)$  è chiuso in  $D^k$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$  e per ogni  $i \in A_k$ ;
6. per ogni  $k \in \mathbb{N}$  e per ogni  $i \in A_k$  si ha che  $\phi_i^k(D^k)$  è contenuto nell'unione di un numero finito di insiemi  $\phi_j^h(D^h)$ .

Ogni sottospazio  $e_i^k := \phi_i^k(D^k)$  è detto  $k$ -cella e  $\phi_i^k$  ne è la *mappa caratteristica*. Il sottospazio  $X^q$  è detto  $q$ -scheletro di  $X$ .

**Osservazione 1.1.3.** Ogni varietà ha una struttura di CW-complesso. In particolare la sfera  $n$ -dimensionale  $S^n$  risulta un CW-complesso costituito da una  $n$ -cella e una  $0$ -cella.

**Definizione 1.1.5.** Sia  $f : Y \rightarrow Z$  una mappa tra spazi topologici. Si dice che  $f$  ha la **proprietà di sollevamento delleomotopie** rispetto a uno spazio topologico  $X$  se, date un'omotopia  $g_t : X \rightarrow Y$  e una mappa  $\overline{g}_0 : X \rightarrow Z$  tale che  $p\overline{g}_0 = g_0$ , esiste un'omotopia  $\overline{g}_t : X \rightarrow Z$  tale che  $p\overline{g}_t = g_t$ .

**Proposizione 1.1.4.** *Un fibrato  $p : E \rightarrow B$  ha la proprietà di sollevamento delle omotopie rispetto a ogni coppia di CW-complessi  $(X, A)$ .*

## 1.2 Fibrati di Hopf

Una particolare categoria di fibrati in sfere è costituita dai *fibrati di Hopf*, ovvero fibrati della forma:  $S^{n-1} \rightarrow S^{2n-1} \rightarrow S^n$ , con  $n = 1, 2, 4, 8$ .

Questa sezione sarà dedicata alla costruzione diretta di tali fibrati, a partire dal caso degenerare:  $S^0 \rightarrow S^1 \rightarrow S^1$ , in cui la fibra si riduce ad uno spazio discreto formato da due punti (e quindi il fibrato risulta essere in realtà una proiezione di rivestimento), al fibrato di Hopf per eccellenza:  $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$ , fino alle sue generalizzazioni in dimensione superiore:  $S^3 \rightarrow S^7 \rightarrow S^4$  e  $S^7 \rightarrow S^{15} \rightarrow S^8$ . La generalizzazione del procedimento dai casi  $n = 1, 2$  ai casi  $n = 4, 8$  richiede tuttavia l'utilizzo di alcuni risultati su quaternioni e ottonioni (e in generale sulle  $*$ -algebre normate, di cui essi fanno parte) allo studio dei quali è dedicata l'Appendice A.

Nel seguito si considereranno gli spazi  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$  dotati della topologia indotta dalla norma, e gli spazi  $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{H}^n, \mathbb{O}^n$  della topologia prodotto.

Per  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ , si definisce la retta proiettiva  $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$  come quoziente di  $\mathbb{K}^2 \setminus \{0\}$  rispetto alla relazione di equivalenza:  $x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}$  tale che  $x = \lambda y$ . Sia  $\bar{p} : \mathbb{K}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{P}^1$  la proiezione a quoziente. Osservando che  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$  hanno struttura di  $\mathbb{R}$ -spazi vettoriali di dimensioni, rispettivamente,  $n = 1, 2, 4, 8$ , è possibile definire la mappa  $p : S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{P}^1$  come restrizione di  $\bar{p}$  a  $S^{2n-1} \subset \mathbb{K}^2$ .

**Osservazione 1.2.1.** *Per  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ , la costruzione appena descritta si può generalizzare: definendo su  $\mathbb{K}^{m+1} \setminus \{0\}$  la stessa relazione di equivalenza vista sopra, si ottengono proiezioni a quoziente  $\bar{p} : \mathbb{K}^{m+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{P}^m$ , che è possibile restringere a mappe  $p : S^{n(m+1)-1} \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{P}^m$ .*

*La non associatività di  $\mathbb{O}$ , che risulta una chiara conseguenza della definizione*

del prodotto di ottonioni data nell'Appendice A, impedisce tuttavia di definire  $\mathbb{OP}^m$  per  $m \neq 1, 2$ .

Richiamiamo ora la definizione di compattificazione di Alexandroff, che sarà utile per dimostrare il prossimo risultato.

**Definizione 1.2.1.** La *compattificazione di Alexandroff* di uno spazio topologico  $(X, T)$  è uno spazio  $(\overline{X}, \overline{T})$ , dove:

- $\overline{X} = X \cup \{\infty\}$ , con  $\infty \notin X$ ;
- $\overline{T} = T \cup \{V \cup \{\infty\} \mid X \setminus V \text{ chiuso e compatto in } X\}$ .

**Proposizione 1.2.2.**  $\mathbb{KP}^1 \cong S^n$ , dove  $n = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K})$ .

*Dimostrazione.* Banalmente, si ha:  $\mathbb{KP}^1 = \{[z, 1] \mid z \in \mathbb{K}\} \cup \{[1, 0]\}$ . Tramite tale rappresentazione, risulta chiaro l'omeomorfismo di  $\mathbb{KP}^1$  con la compattificazione di Alexandroff di  $\mathbb{K}$ , ad esempio tramite le due mappe inverse:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{KP}^1 &\rightarrow \overline{\mathbb{K}}, & \Phi([u, v]) &= \begin{cases} uv^{-1} & v \neq 0 \\ \infty & v = 0 \end{cases} \\ \Phi^{-1} : \overline{\mathbb{K}} &\rightarrow \mathbb{KP}^1, & \Phi^{-1}(z) &= \begin{cases} [z, 1] & z \neq \infty \\ [1, 0] & z = \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Lo spazio  $\overline{\mathbb{K}}$  è a sua volta omeomorfo a  $S^n$  tramite la mappa  $\pi : S^n \rightarrow \overline{\mathbb{K}}$ , ottenuta come estensione della proiezione stereografica (di cui sono date le equazioni per  $n = 3$  nella Definizione 1.3.2) da un punto  $N \in S^n$  ponendo  $\pi(N) := \infty$ . La composizione di  $\Phi$  con tale proiezione costituisce quindi l'omeomorfismo cercato.  $\square$

Tale proposizione permette di interpretare le mappe  $p$ , definite precedentemente, come applicazioni di sfere in sfere, ovvero:  $p : S^{2n-1} \rightarrow S^n$ . Resta ora da mostrare che le mappe definite diano effettivamente luogo a dei fibrati. Vediamo innanzitutto il caso  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

**Proposizione 1.2.3.** *La mappa  $p : S^1 \rightarrow S^1$  è una proiezione di rivestimento.*

*Dimostrazione.* Restringendo la relazione di equivalenza che definisce il proiettivo alla sfera  $S^1$ , si ottiene una relazione data da:  $x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| = 1$  tale che  $x = \lambda y$ . Si ha quindi  $p^{-1}(x) = \{x, -x\}$  per ogni  $x \in S^1$ . Si consideri  $S^1 = \{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi]\} \subset \mathbb{C}$ . Preso un punto  $x = e^{i\theta} \in S^1$ , sia  $U = \{e^{i\alpha} \mid \alpha \in ]\theta - \frac{\pi}{4}, \theta + \frac{\pi}{4}[ \}$ . La controimmagine di  $U$  tramite  $p$  è data da  $p^{-1}(U) = \{e^{i\alpha} \mid \alpha \in ]\theta - \frac{\pi}{4}, \theta + \frac{\pi}{4}[ \} \cup \{-e^{i\alpha} \mid \alpha \in ]\theta - \frac{\pi}{4}, \theta + \frac{\pi}{4}[ \}$ . Tale unione è chiaramente un'unione disgiunta, ed entrambi gli aperti sono applicati omeomorficamente da  $p$  su  $U$ . Risulta quindi verificata per  $p$  la definizione di proiezione di rivestimento.  $\square$

Grazie all'Osservazione 1.1.2, si può concludere che  $p$  dà ad  $S^1$  la struttura di fibrato, in quanto le fibre hanno tutte cardinalità 2. Notando inoltre che  $\{-x, x\} \cong S^0$ , si ottiene quindi un caso banale di fibrato di Hopf:

$$S^0 \rightarrow S^1 \rightarrow S^1.$$

Analizziamo ora i casi  $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ . È importante osservare che, nella seguente dimostrazione, la definizione delle banalizzazioni locali necessita solo dell'esistenza di una norma e di un inverso moltiplicativo. D'altro canto i passaggi algebrici utilizzati per mostrare che tali mappe siano effettivamente omeomorfismi risultano leciti nel caso in cui  $\mathbb{K}$  sia un'algebra alternativa. Tutte queste proprietà sono garantite per  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$  dai risultati dell'appendice A.

**Proposizione 1.2.4.** *Le mappe  $p : S^{2n-1} \rightarrow S^n$  definite precedentemente danno a  $S^{2n-1}$  la struttura di fibrato su  $S^n$ , con fibra  $S^{n-1}$ , per  $n = 2, 4, 8$ .*

*Dimostrazione.* Mostriamo che sono verificate le condizioni di locale trivialità, considerando come spazio base, al posto della sfera  $S^n$ , la compattificazione  $\overline{\mathbb{K}}$  ad essa omeomorfa. Presi  $U_0 := \overline{\mathbb{K}} \setminus \{\infty\}$ ,  $U_1 := \overline{\mathbb{K}} \setminus \{0\}$ , siano  $h_i : p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times S^{n-1}$ ,  $g_i : U_i \times S^{n-1} \rightarrow p^{-1}(U_i)$  date da:

$$\begin{aligned} h_0(x, y) &= (xy^{-1}, y/|y|) & g_0(a, b) &= (ab, b)/\|(ab, b)\| \\ h_1(x, y) &= (xy^{-1}, x/|x|) & g_1(a, b) &= (a, a^{-1}b)/\|(a, a^{-1}b)\|. \end{aligned}$$

Si osservi che, per come è stata definita la mappa di proiezione, si ha:

$$p^{-1}(U_0) = \{(u, v) \in S^{2n-1} \mid v \neq 0\}, \quad p^{-1}(U_1) = \{(u, v) \in S^{2n-1} \mid u \neq 0\}.$$

Alla luce di questo fatto, le mappe definite risultano essere continue, in quanto composizioni di funzioni chiaramente continue. Sarà sufficiente dunque mostrare che  $h_i$  è l'inversa di  $g_i$  per  $i = 0, 1$  per affermare che tali mappe sono in effetti omeomorfismi tra  $U_i \times S^{n-1}$  e  $p^{-1}(U_i)$ , e che quindi la condizione di trivialità locale è soddisfatta. Ci limiteremo a mostrare che  $h_0$  è l'inversa di  $g_0$ , in quanto il procedimento è del tutto analogo per le altre due applicazioni.

$$\begin{aligned} g_0(h_0(x, y)) &= g_0(xy^{-1}, y/|y|) = \frac{(x/|y|, y/|y|)}{\|(x/|y|, y/|y|)\|} = (x, y)/\|(x, y)\| = (x, y); \\ h_0(g_0(a, b)) &= h_0(ab/\|(ab, b)\|, b/\|(ab, b)\|) = (abb^{-1}\frac{\|(ab, b)\|}{\|(ab, b)\|}, \frac{b}{|b|}\frac{\|(ab, b)\|}{\|(ab, b)\|}) = (a, b), \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza deriva da ovvie semplificazioni e dal fatto che  $b \in S^{n-1} \implies |b| = 1$ . Mostriamo ora che la fibra è effettivamente  $S^{n-1}$ . La relazione di equivalenza che definisce la mappa  $p$  come proiezione a quoziente, ristretta alla sfera  $S^{2n-1}$ , si riduce a:  $x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| = 1$  tale che  $x = \lambda y$ . Ossevando che, come ovvia conseguenza dell'isomorfismo tra  $\mathbb{K}$  e  $\mathbb{R}^n$ , la sfera  $S^{n-1}$  può essere vista come l'insieme degli elementi di norma unitaria in  $\mathbb{K}$ , le classi di equivalenza (e quindi le fibre) risultano della forma:  $[x] = \{\lambda x \mid \lambda \in S^{n-1}\} \cong S^{n-1}$ .  $\square$

Abbiamo quindi ottenuto i tre fibrati di Hopf:

$$S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2, \quad S^3 \rightarrow S^7 \rightarrow S^4, \quad S^7 \rightarrow S^{15} \rightarrow S^8.$$

### 1.3 Fibrato di Hopf e rotazioni di $\mathbb{R}^3$ : la struttura delle fibre

In quest'ultima sezione ci dedicheremo al più classico dei fibrati di Hopf,  $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$ , con lo scopo principale di fornire un'idea per visualizzare in

modo relativamente semplice la struttura del fibrato. Delineeremo una traccia del procedimento seguito, omettendo deliberatamente alcune verifiche, al fine di non appesantire la trattazione. Daremo in particolare una descrizione alternativa della mappa di proiezione, mostrando in che modo essa è correlata alle rotazioni di  $\mathbb{R}^3$ , per poi studiare, tramite la proiezione stereografica, la struttura delle fibre che lo compongono.

Un primo passo consiste nel mettere in relazione l'algebra dei quaternioni con le rotazioni di  $\mathbb{R}^3$ . Più precisamente, vale la seguente osservazione:

**Osservazione 1.3.1.** *Identifichiamo  $\mathbb{R}^3$  con il sottospazio di  $\mathbb{H}$  dei quaternioni puri, ossia quello generato da  $i, j, k$ , tramite la mappa che manda il punto  $P = (x, y, z)$  nel quaternionone  $p = xi + yj + zk$ . Sia  $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$  tale che  $\|q\| = 1$ . Si ha:*

1. *se  $p$  è puro, allora  $qpq^{-1}$  è puro;*
2. *la mappa  $R_q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da  $R_q(p) = qpq^{-1}$  è una rotazione di angolo  $\theta = 2 \arccos a$  e asse di rotazione  $(b, c, d)$ ;*
3. *presi  $q, q' \in \mathbb{H}$ , si ha:  $R_q \circ R_{q'} = R_{qq'}$ .*

*Dimostrazione.* I punti 1. e 3. si ottengono tramite calcoli diretti. Mostriamo il punto 2. Si osservi innanzitutto che la mappa  $R_q$  preserva la norma. Infatti:  $\|R_q(p)\| = \|qpq^{-1}\| = \|q\| \|p\| \|q^{-1}\| = \|p\|$ . È inoltre immediato verificare che la mappa è lineare, e ricavarne dunque la matrice associata rispetto alla base canonica nel dominio e nel codominio, che risulta essere:

$$\begin{pmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2bc - 2ad & 2bd + 2ac \\ 2bc + 2ad & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2cd - 2ab \\ 2bd - 2ac & 2cd + 2ab & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

Tramite calcoli diretti è ora possibile verificare che tale trasformazione ha un unico autovalore  $\lambda = 1$ , con  $v_\lambda = (b, c, d)$  come autovettore associato. Si può quindi concludere che si  $R_q$  è una rotazione di asse  $(b, c, d)$ . Un risultato di



algebra lineare (si veda [Eme15, pag.93]) permette inoltre, data una matrice  $A$  associata a una rotazione di  $\mathbb{R}^3$ , di calcolare l'angolo di rotazione  $\theta$ , tramite la formula:  $\text{Tr}(A) = 1 + 2 \cos \theta$ , dove  $\text{Tr}(A)$  indica la traccia di  $A$ , ovvero la somma degli elementi sulla diagonale. Applicando tale risultato alla matrice associata ad  $R_q$ , si ottiene il risultato desiderato:  $\theta = 2 \arccos a$ .  $\square$

Nel seguito identificheremo ogni punto  $Q = (a, b, c, d) \in S^3$  con il quaternione unitario associato  $q = a + bi + cj + dk$ , e ogni punto  $P = (x, y, z) \in S^2$  con il quaternione  $p = xi + yj + zk$ . E' ora possibile dare, tramite la mappa  $R_q$ , una definizione alternativa della mappa di Hopf  $S^3 \rightarrow S^2$ , la cui unica differenza da quella precedentemente descritta consiste in un cambio di coordinate.

**Definizione 1.3.1.** Siano  $P_0 = (1, 0, 0) \in S^2$ ,  $Q = (a, b, c, d) \in S^3$  e  $q$  il quaternione associato. La mappa di Hopf è:

$$h : S^3 \rightarrow S^2$$

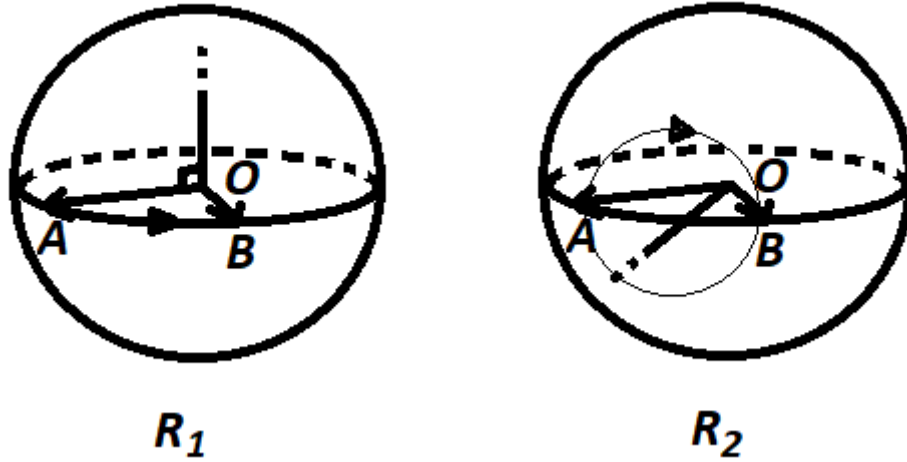
$$h(q) = R_q(p_0) = qi q^{-1}.$$

Equivalentemente:

$$h(a, b, c, d) = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2, 2(ad + bc), 2(bd - ac)).$$

La mappa di Hopf è quindi descritta tramite rotazioni dello spazio tridimensionale, in quanto manda il punto  $Q \in S^3$  (equivalentemente il quaternione  $q$ ) nell'immagine del punto  $(1, 0, 0)$  tramite la rotazione  $R_q$ . Determinare la fibra sopra un punto  $P \in S^2$  equivale, dunque, a determinare l'insieme delle rotazioni di  $\mathbb{R}^3$  che mandano  $(1, 0, 0)$  in  $P$ . Si considerino  $A, B \in S^2$  non antipodali e i vettori  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ , dove  $O$  indica l'origine di  $\mathbb{R}^3$ . Vediamo due particolari rotazioni di  $\mathbb{R}^3$  che mandano  $A$  in  $B$ , illustrate nella Figura 1.3. La prima, che indicheremo con  $R_1$ , ha asse  $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$  e angolo di rotazione  $\arccos(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})$ . La seconda, che indicheremo con  $R_2$ , ha asse  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$  e angolo di rotazione  $\pi$ .

Consideriamo il caso particolare in cui  $A = (1, 0, 0)$  e  $B = P$ . Le rotazioni

Figura 1.3: Rotazioni  $R_1$  e  $R_2$  che mandano  $A$  in  $B$ .

$R_1$  ed  $R_2$  sono, per quanto detto precedentemente, associate a due quaternioni unitari  $q_1, q_2$  che, se visti come punti di  $S^3$ , appartengono alla fibra  $p^{-1}(P)$ . E' possibile, tramite il punto 2 dell'Osservazione 1.3.1, determinare formule esplicite per  $q_1$  e  $q_2$ , che risultano essere le seguenti:

**Proposizione 1.3.2.** *Sia  $P = (x, y, z) \in S^2$ . Si ha:*

$$q_1 = \sqrt{\frac{1+x}{2}} \left( 1 - \frac{z}{1+x}j + \frac{y}{1+x}k \right);$$

$$q_2 = \frac{1}{\sqrt{2(1+x)}} ((1+x)i + yj + zk).$$

Sia  $e^{it} = \cos t + i \sin t = (\cos t, \sin t, 0, 0)$ . Si dimostra che, preso un punto  $P = (x, y, z) \in S^2$ , la fibra sopra  $P$  si può esprimere parametricamente in termini delle rotazioni associate a  $e^{it}$  al variare di  $t$ , e di quelle associate a  $q_1$  e  $q_2$ . Più precisamente, è facile vedere che:

**Proposizione 1.3.3.** *Sia  $h : S^3 \rightarrow S^2$  il fibrato di Hopf e sia  $P \in S^2$ . Si ha:*

1. se  $P = (-1, 0, 0)$ , allora  $h^{-1}(P) = \{ke^{it}\}_{0 \leq t \leq 2\pi}$ ;
2. se  $P \neq (-1, 0, 0)$ , allora  $h^{-1}(P) = \{q_1 e^{it}\}_{0 \leq t \leq 2\pi} = \{q_2 e^{it}\}_{0 \leq t \leq 2\pi}$ .

La proposizione precedente conferma quanto già affermato nella Sezione 1.2, dedicata alla costruzione dei fibrati, ovvero il fatto che le fibre della mappa di Hopf siano circonferenze, come risulta dalla parametrizzazione appena vista. Ciò che rende interessante la geometria del fibrato di Hopf è data dalla posizione reciproca di fibre diverse nella sfera tridimensionale  $S^3$ . In particolare l'ultimo risultato di questo capitolo mostrerà che le fibre sono legate a due a due in una struttura detta **Hopf link**, come mostrato nella Figura 1.4.

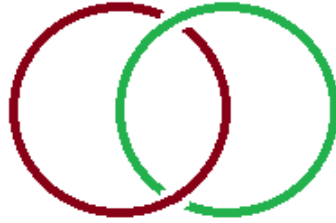


Figura 1.4: Hopf link.

Uno strumento utile al fine di visualizzare il modo in cui le fibre sono organizzate è la proiezione stereografica, che permette di studiare  $S^3$  (meno un suo punto) non in  $\mathbb{R}^4$ , in cui essa è naturalmente immersa, ma nel più familiare spazio tridimensionale  $\mathbb{R}^3$ . Di tale mappa esistono generalizzazioni in ogni dimensione, le cui definizioni sono del tutto analoghe a quella che segue:

**Definizione 1.3.2.** Si chiama **proiezione stereografica** la mappa:

$$s : S^3 \setminus (1, 0, 0, 0) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$s(w, x, y, z) = \left( \frac{x}{1-w}, \frac{y}{1-w}, \frac{z}{1-w} \right).$$

Un'importante proprietà della proiezione stereografica è quella di preservare le circonferenze, salvo quelle passanti per il punto  $(1, 0, 0, 0)$ . In parti-

colare vale la seguente proposizione, per la dimostrazione della quale si può far riferimento, per esempio, a [Ber09, Cap.4]:

**Proposizione 1.3.4.** *Sia  $C \subset S^3$  una circonferenza. Allora  $s(C)$  è:*

1. *una circonferenza in  $\mathbb{R}^3$  se  $(1, 0, 0, 0) \notin C$ ;*
2. *una retta in  $\mathbb{R}^3$  se  $(1, 0, 0, 0) \in C$ .*

Procederemo ora utilizzando la proiezione stereografica per mostrare l'ultimo risultato:

**Proposizione 1.3.5.** *Le fibre della mappa di Hopf sono a due a due Hopf link.*

*Dimostrazione.* Si consideri  $h^{-1}(-1, 0, 0) = \{j \sin t + k \cos t\}_{0 \leq t \leq 2\pi}$ . Si ha  $s \circ h^{-1}(-1, 0, 0) = \{(0, \cos t, \sin t)\}_{0 \leq t \leq 2\pi}$ , cioè la fibra  $h^{-1}(-1, 0, 0)$  viene mandata dalla proiezione stereografica nella circonferenza unitaria sul piano  $yz$ . In modo analogo,  $s \circ h^{-1}(1, 0, 0) = \left\{ \left( \frac{\sin t}{1 - \cos t}, 0, 0 \right) \right\}_{0 \leq t \leq 2\pi}$ , ovvero la fibra  $h^{-1}(1, 0, 0)$  viene mandata nell'asse  $x$ . Estendendo la proiezione stereografica a tutta la sfera  $S^3$  tramite  $s(1, 0, 0, 0) = \infty$ , l'asse  $x$  può essere pensato come una circonferenza passante per  $\infty$ . Esplicitando  $q_1$  nella parametrizzazione della fibra  $h^{-1}(P) = \{q_1 e^{it}\}_{0 \leq t \leq 2\pi}$  e applicando la proiezione stereografica, per un qualsiasi punto  $P = (x, y, z) \in S^2$  si ottiene una proiezione della fibra della forma:  $s \circ h^{-1}(x, y, z) = \{(e(t), f(t), g(t))\}_{0 \leq t \leq 2\pi}$ , dove  $e(t), f(t), g(t)$  si calcolano agilmente tramite calcoli diretti. Questa proiezione interseca il piano  $yz$  esattamente in due punti  $Q_1$  e  $Q_2$ , corrispondenti rispettivamente ai valori  $t = 0$  e  $t = \pi$ . Tenendo presente che  $(x, y, z) \in S^2$  e calcolando la norma di  $Q_1$  e  $Q_2$  in funzione di  $(x, y, z)$ , si ottiene che i due punti hanno una norma maggiore di 1 e l'altro norma minore di 1. Ciò significa che la proiezione della fibra considerata interseca il piano  $xy$  una volta all'interno della circonferenza  $s \circ h^{-1}(-1, 0, 0) = \{(0, \cos t, \sin t)\}_{0 \leq t \leq 2\pi}$ , e una volta al suo esterno. In altre parole, per ogni punto  $P \in S^2$ , le fibre  $s \circ h^{-1}(-1, 0, 0)$  e  $s \circ h^{-1}(P)$  costituiscono un link di Hopf. Per mostrare che tale proprietà sussiste per ogni coppia  $C_1, C_2$  di immagini di fibre tramite la proiezione

stereografica, si definisce una mappa continua e biiettiva che mandi  $C_1$  nella circonferenza unitaria sul piano  $xy$  e  $C_2$  nella proiezione di un'altra fibra. Si dimostra che una tale mappa non modifica il link costituito da  $C_1$  e  $C_2$ , per cui tali circonferenze devono necessariamente costituire un link di Hopf. Per passare infine a dimostrare il risultato per le fibre vere e proprie è sufficiente osservare che la proiezione stereografica è anch'essa una biiezione continua che manda circonferenze in circonferenze, dunque preserva il link.  $\square$

## Capitolo 2

# Coomologia di fibrati

Questo capitolo sarà dedicato allo studio di alcuni risultati sulla coomologia dei fibrati, utilizzati poi per mostrare una condizione necessaria sulle dimensioni di fibra, spazio totale e spazio base in un fibrato in cui tali spazi sono tutti costituiti da sfere. Mostriamo in particolare che, per un fibrato in sfere  $S^k \rightarrow S^m \rightarrow S^n$ , deve necessariamente essere  $k = n - 1$ ,  $m = 2n - 1$ . I contenuti descritti in questo capitolo si trovano in [Hat09].

Nel seguito  $R$  indicherà un qualsiasi anello commutativo unitario,  $H^k(X; R)$ ,  $\widetilde{H}^k(X; R)$  e  $H^k(X, A; R)$  indicheranno rispettivamente il  $k$ -esimo modulo di coomologia singolare di  $X$  a coefficienti in  $R$ , il  $k$ -esimo modulo di coomologia singolare ridotta di  $X$  a coefficienti in  $R$  e il  $k$ -esimo modulo di coomologia singolare di  $X$  relativa ad  $A$  a coefficienti in  $R$ . Si utilizzeranno inoltre il prodotto cup  $\smile: H^p(X; R) \times H^q(X; R) \rightarrow H^{p+q}(X; R)$  e la sua versione relativa  $\smile: H^p(X, A; R) \times H^q(X; R) \rightarrow H^{p+q}(X, A; R)$  che rendono, rispettivamente,  $H^*(X; R) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H^k(X; R)$  e  $H^*(X, A; R) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H^k(X, A; R)$  algebre graduate. Si indicherà infine il prodotto tensoriale di  $R$ -moduli con il simbolo  $\otimes_R$ . Per alleggerire la notazione, si utilizzeranno talvolta  $H^*(X)$  per indicare  $H^*(X; R)$  e  $\otimes$  per indicare  $\otimes_R$ .

Concludiamo questa introduzione al capitolo enunciando un teorema sulla coomologia relativa dei prodotti cartesiani, noto come *formula di Kunneth*, la cui generalizzazione al caso dei fibrati fornirà il punto di partenza per i

sucessivi risultati che tratteremo. Per la dimostrazione si veda ad esempio [Hat09, Teorema 3.21].

**Teorema 2.0.1.** ([Hat09, Teorema 3.21]). *Siano  $(X, A)$  e  $(Y, B)$  CW-complessi. Supponiamo che  $H^k(Y, B; R)$  sia un  $R$ -modulo libero finitamente generato per ogni  $k$ . Allora la mappa:*

$$\begin{aligned} \Psi : H^*(X, A; R) \otimes_R H^*(Y, B; R) &\rightarrow H^*(X \times Y, A \times Y \cup X \times B; R) \\ \Psi(a, b) &= p_1^*(a) \smile p_2^*(b), \end{aligned}$$

è un isomorfismo, con  $p_1$  e  $p_2$  proiezioni da  $X \times Y$  a, rispettivamente,  $X$  e  $Y$ .

## 2.1 Il Teorema di Leray-Hirsch

La *formula di Kunneth* permette di calcolare la coomologia di un prodotto cartesiano come prodotto tensoriale delle coomologie dei due fattori. Il *Teorema di Leray-Hirsch* garantisce che il calcolo della coomologia possa essere fatto nello stesso modo per alcuni fibrati che soddisfino determinate ipotesi.

Daremo prima alcune definizioni e risultati preliminari, necessari alla dimostrazione del teorema.

**Definizione 2.1.1.** Siano  $p : E \rightarrow B$  un fibrato ed  $f : A \rightarrow B$  una mappa. Si definiscono l'insieme  $f^*(E) := \{(a, e) \in A \times E \mid f(a) = p(e)\}$  e le due mappe  $\pi_A : f^*(E) \rightarrow A$  data da  $\pi_A((a, e)) = a$  e  $\pi_E : f^*(E) \rightarrow E$  data da  $\pi_E((a, e)) = e$ . È immediato verificare che il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} f^*(E) & \xrightarrow{\pi_E} & E \\ \downarrow \pi_A & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

è commutativo. Inoltre  $\pi_A : f^*(E) \rightarrow A$  è un fibrato avente la stessa fibra di  $p : E \rightarrow B$  detto **fibrato pullback** di  $p$  tramite  $f$ .

**Definizione 2.1.2.** Siano  $(X, x_0), (Y, y_0), (Z, z_0)$  spazi topologici puntati e siano  $f : (X, x_0) \rightarrow (Z, z_0)$  e  $g : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ . Si definisce lo spazio  $X \vee Y$  come il quoziente di  $X \sqcup Y$  rispetto alla relazione di equivalenza che identifica  $x_0$  e  $y_0$ . Sia ora la mappa  $\overline{f \vee g} : X \sqcup Y \rightarrow Z$  tale che  $\overline{f \vee g}(x) = f(x)$  se  $x \in X$  e  $\overline{f \vee g}(y) = g(y)$  se  $y \in Y$ . Osservando che  $f(x_0) = g(y_0) = z_0$ , si ha che tale mappa passa al quoziente. Si definisce  $f \vee g : X \vee Y \rightarrow Z$  come la mappa indotta da  $\overline{f \vee g}$  sul quoziente.

**Definizione 2.1.3.** Sia  $(X, x_0)$  uno spazio topologico puntato e sia  $A \subset X$  tale che  $x_0 \in A$ . L'***n-esimo gruppo di omotopia*** di  $(X, x_0)$  è l'insieme  $\pi_n(X, x_0)$  costituito dalle classi di omotopia di mappe  $(S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ , con  $s_0 \in S^n$ . L'operazione di gruppo è  $fg := (f \vee g) \circ c : S^n \rightarrow X$ , dove  $c : S^n \rightarrow S^n \vee S^n$  è la mappa che collassa l'equatore  $S^{n-1} \subset S^n$  ad un punto. L'***n-esimo gruppo di omotopia relativa*** di  $(X, A, x_0)$  è l'insieme  $\pi_n(X, A, x_0)$  costituito dalle classi di omotopia di mappe  $(D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ , con  $s_0 \in \partial D^n = S^{n-1}$ . L'operazione di gruppo è  $fg := (f \vee g) \circ d : D^n \rightarrow X$ , dove  $d : D^n \rightarrow D^n \vee D^n$  è la mappa che collassa  $D^{n-1} \subset D^n$  ad un punto.

Enunciamo ora un risultato per la dimostrazione del quale si faccia riferimento a [Hat09, Teorema 4.41].

**Teorema 2.1.1.** Sia  $F \rightarrow E \rightarrow B$  un fibrato. Siano  $b_0 \in B$  e  $x_0 \in p^{-1}(b_0)$ . Allora la mappa  $p_* : \pi_n(E, F, x_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$  è un isomorfismo per ogni  $n \geq 1$ . Quindi, se  $B$  è connesso per archi, c'è una successione esatta lunga:

$$\cdots \rightarrow \pi_n(F, x_0) \rightarrow \pi_n(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, x_0) \rightarrow \cdots \rightarrow 0.$$

**Definizione 2.1.4.** Siano  $Y$  e  $Z$  spazi topologici e  $f : X \rightarrow Z$  una mappa. Si dice che  $f$  è un'***equivalenza omotopica debole*** tra  $X$  e  $Y$  se induce isomorfismi  $\pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$  per ogni  $n$  e per ogni  $x_0 \in X$  e  $y_0 \in Y$ .

Enunceremo ora un'importante proprietà delle equivalenze omotopiche deboli, per la cui dimostrazione si può far riferimento a [Hat09, Proposizione 4.21].



**Proposizione 2.1.2.** *Un'equivalenza omotopica debole  $f : Y \rightarrow Z$  induce isomorfismi  $f^* : H^n(Z; R) \rightarrow H^n(Y; R)$  per ogni  $n$  e per ogni anello di coefficienti  $R$ .*

Per la dimostrazione della seguente proposizione si veda [Hat09, Proposizione 4.13].

**Proposizione 2.1.3.** *Sia  $Y$  uno spazio topologico. Allora esistono un CW-complesso  $X$  e una mappa  $f : X \rightarrow Y$  tale che  $f$  sia un'equivalenza omotopica debole. La coppia  $(X, f)$  è detta **approssimazione CW** di  $Y$ .*

**Definizione 2.1.5.** Sia  $(X, x_0)$  uno spazio topologico puntato, non vuoto e connesso per archi e sia  $A \subset X$  tale che  $x_0 \in A$ . Si dice che  $(X, x_0)$  è  **$k$ -connesso** se  $\pi_i(X, x_0) = 0$  per ogni  $i \leq k$ . Si dice che  $(X, A, x_0)$  è  **$k$ -connesso** se  $\pi_i(X, A, x_0) = 0$  per ogni  $i \leq k$ .

**Osservazione 2.1.4.** *Sfruttando la connessione per archi di  $X$ , nel caso assoluto come in quello relativo, è possibile dare la definizione di  $k$ -connessione senza fare riferimento ad un punto base  $x_0$ . Si verifica infatti che:*

- $\pi_i(X, x_0) = 0$  per ogni  $i \leq k \implies \pi_i(X, x) = 0$  per ogni  $i \leq k$  e per ogni  $x \in X$ ;
- $\pi_i(X, A, x_0) = 0$  per ogni  $i \leq k \implies \pi_i(X, A, x) = 0$  per ogni  $i \leq k$  e per ogni  $x \in A \subset X$ .

**Lemma 2.1.5.** *Siano  $p : E \rightarrow B$  un fibrato e  $A \subset B$  tale che  $(B, A)$  sia  $k$ -connesso. Allora  $(E, p^{-1}(A))$  è  $k$ -connesso.*

*Dimostrazione.* Consideriamo una mappa  $g : (D^i, \partial D^i) \rightarrow (E, p^{-1}(A))$ , con  $i \leq k$ . Sia  $f = pg$ . L'ipotesi di  $k$ -connessione assicura che esista un'omotopia tra  $f$  e una mappa  $f_1$ , la cui immagine sia contenuta in  $A$ . Per la Proposizione 1.1.4 si può concludere che tale omotopia si solleva ad un'omotopia tra  $g$  e  $g_1$ , con immagine contenuta in  $p^{-1}(A)$ . Quindi  $(E, p^{-1}(A))$  è  $k$ -connesso.  $\square$

**Teorema 2.1.6.** *Sia  $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$  un fibrato tale che, per un anello commutativo di coefficienti  $R$ , si abbia:*

- $H^n(F; R)$  è un  $R$ -modulo libero finitamente generato  $\forall n$ ;
- Presa l'inclusione  $i : F \rightarrow E$ , esistono classi  $c_j \in H^{k_j}(E; R)$  le cui restrizioni  $i^*(c_j)$  formano una base per  $H^*(F; R)$  in ogni fibra  $F$ .

Allora  $H^*(E; R)$  è un  $H^*(B; R)$ -modulo libero con base  $\{c_j\}$ , e la moltiplicazione per scalare è definita da  $bc := p^*(b) \smile c$ , con  $b \in H^*(B; R)$  e  $c \in H^*(E; R)$ .

Equivalentemente, la mappa

$$\begin{aligned} \Phi : H^*(B; R) \otimes_R H^*(F; R) &\rightarrow H^*(E; R) \\ \Phi(\Sigma_{i,j} b_i \otimes i^*(c_j)) &= \Sigma_{i,j} p^*(b_i) \smile c_j \end{aligned}$$

è un isomorfismo.

*Dimostrazione.* Supponiamo prima che  $B$  sia un CW-complesso di dimensione finita, e procediamo per induzione sulla sua dimensione.

Il caso in cui la dimensione di  $B$  è 0 è banale. Sia  $\dim(B) = n$ . Sia  $B' \subset B$  ottenuto eliminando un punto  $x_\alpha$  dall'interno di ogni  $n$ -cella  $e_\alpha^n$  di  $B$ . Sia  $E' = p^{-1}(B')$ . Allora abbiamo un diagramma commutativo a righe esatte:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & H^*(B) \otimes H^*(F) & \rightarrow & H^*(B') \otimes H^*(F) & \rightarrow & H^*(B, B') \otimes H^*(F) \rightarrow \cdots \\ & & \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi \\ \cdots & \longrightarrow & H^*(E) & \longrightarrow & H^*(E') & \longrightarrow & H^*(E, E') \longrightarrow \cdots \end{array}$$

La mappa  $\Phi : H^*(B, B') \otimes H^*(F) \rightarrow H^*(E, E')$  è definita esattamente come nel caso assoluto, utilizzando tuttavia la versione relativa del prodotto cup:  $H^*(E, E') \times H^*(E) \rightarrow H^*(E, E')$ . Mostriamo l'esattezza del diagramma. La prima riga è esatta, in quanto consiste di una successione esatta di coomologia relativa tensorizzata con  $H^*(F)$ . Essendo quest'ultimo un modulo libero, tale operazione preserva l'esattezza. La seconda riga è anch'essa esatta, essendo una successione di coomologia relativa. Mostriamo la commutatività per la parte del diagramma in cui compare l'operatore di cobordo (la commutatività del diagramma negli altri due quadrati segue direttamente dall'ovvia naturalezza di  $\Phi$  ([Hat09, pag.127])). Preso un elemento  $b \otimes i^*(c_j) \in H^*(B') \otimes H^*(F)$ , si ha:

$$\begin{aligned}\Phi(\delta(b) \otimes i^*(c_j)) &= p^*(\delta(b)) \smile c_j = \delta(p^*(b)) \smile c_j \\ \delta(\Phi(b \otimes i^*(c_j))) &= \delta(p^*(b) \smile c_j) = \delta(p^*(b)) \smile c_j,\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza deriva dal fatto che l'operatore di cobordo sia un'operatore di derivazione sull'algebra graduata  $H^*$  (per il quale vale quindi un analogo della regola di Leibnitz) e dal fatto che  $\delta(c_j) = 0$ , in quanto  $c_j \in H^*(E')$  è immagine di una classe  $\overline{c_j} \in H^*(E)$  tramite la mappa indotta dall'inclusione  $E' \rightarrow E$ , e concludendo per esattezza della seconda riga.

L'  $(n-1)$ -scheletro  $B^{n-1}$  è un retratto di deformazione di  $B'$ . Si ha quindi che i gruppi di omotopia relativa di  $(B', B^{n-1})$  sono banali fino alla dimensione  $(n-1)$ , ovvero  $(B', B^{n-1})$  è  $(n-1)$ -connesso. Dal Lemma 2.1.5 si deduce che anche  $(E', p^{-1}(B^{n-1}))$  lo è. Quindi, tramite la successione esatta lunga di omotopia relativa, si ha che l'inclusione  $i : p^{-1}(B^{n-1}) \rightarrow E'$  è un'equivalenza omotopica debole, cioè induce isomorfismi su tutti i gruppi di omotopia. Per la Proposizione 2.1.2 tali isomorfismi sussistono anche tra i gruppi di coomologia.

Mostriamo ora che  $\Phi : H^*(B, B') \otimes H^*(F) \rightarrow H^*(E, E')$  è un isomorfismo. Per definizione di fibrato, esistono aperti  $U_\alpha \subset e_\alpha^n$  dei punti  $x_\alpha$  tali che  $p^{-1}(U_\alpha)$  sia omeomorfo al prodotto di  $U_\alpha$  con la fibra. Siano  $U := \bigcup_\alpha U_\alpha$  e  $U' := U \cap B'$ . Per il teorema di escissione per la coomologia ([Hat09, pag.201]), si ha:  $H^*(B, B') \cong H^*(U, U')$  e  $H^*(E, E') \cong H^*(p^{-1}(U), p^{-1}(U'))$ . È dunque sufficiente mostrare che  $\Phi : H^*(U, U') \otimes H^*(F) \rightarrow H^*(U \times F, U' \times F)$  è un isomorfismo, che chiaramente vale per il Teorema 2.0.1.

Abbiamo quindi mostrato che la mappa  $\Phi : H^*(B, B') \otimes H^*(F) \rightarrow H^*(E, E')$  è un isomorfismo. L'ipotesi induttiva assicura inoltre che anche la mappa  $\Phi : H^*(B') \otimes H^*(F) \rightarrow H^*(E')$  sia un isomorfismo, in quanto gli spazi coinvolti sono CW-complessi di dimensione strettamente inferiore a quella di  $B$ . Applicando il lemma dei cinque ([Hat09, pag.129]) si può quindi concludere che anche la mappa  $\Phi : H^*(B) \otimes H^*(F) \rightarrow H^*(E)$  è un isomorfismo. Questo conclude la dimostrazione per un CW-complesso  $B$  di dimensione finita.

Nel caso in cui  $B$  sia un CW-complesso di dimensione infinita, consideriamo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
H^*(B) \otimes H^*(F) & \longrightarrow & H^*(B^n) \otimes H^*(F) \\
\downarrow \Phi & & \downarrow \Phi \\
H^*(E) & \longrightarrow & H^*(p^{-1}(B^n))
\end{array}$$

Essendo  $(B, B^n)$  una coppia  $n$ -connessa, per il Lemma 2.1.5 si ha che anche  $(E, p^{-1}(B^n))$  lo è. Dunque nel diagramma le mappe orizzontali sono isomorfismi tra i gruppi di coomologia di dimensione  $k < n$ . Essendo la mappa  $\Phi$  a destra un isomorfismo per quanto già mostrato per i CW-complessi di dimensione finita, anche  $\Phi : H^k(B) \otimes H^k(F) \rightarrow H^k(E)$  lo è  $\forall k < n$ . Il fatto che  $n$  sia arbitrario permette di concludere che  $\Phi : H^*(B) \otimes H^*(F) \rightarrow H^*(E)$  è un isomorfismo. Il teorema è quindi mostrato nel caso in cui  $B$  sia un CW-complesso. Siano ora  $B$  uno spazio qualsiasi e  $f : A \rightarrow B$  una sua approssimazione CW, che esiste per la Proposizione 2.1.3. Si consideri il fibrato pullback:  $f^*(E) \rightarrow A$ . Applicando il lemma dei cinque ([Hat09, pag.129]) alla successione esatta lunga di omotopia per le coppie  $(E, F)$  e  $(f^*(E), F)$  si ottiene che  $\pi_E : f^*(E) \rightarrow E$  induce isomorfismi su tutti i gruppi di omotopia. Quindi, per la Proposizione 2.1.2, vi sono isomorfismi anche tra i gruppi di coomologia. Le classi  $\pi_E^*(c_j) \in H^*(f^*(E))$  si restringono ancora a basi in ogni fibra. Ci si può quindi ricondurre a mostrare il teorema per  $f^*(E) \rightarrow A$ . Essendo  $A$  un CW-complesso, tale fibrato rientra nel caso precedente, dunque la dimostrazione è conclusa.  $\square$

## 2.2 La successione di Gysin

Un altro strumento che permette uno studio della coomologia di una particolare tipologia di fibrati è una successione esatta lunga, detta *successione di Gysin*, la quale mette in relazione i gruppi di coomologia di fibrati della forma  $S^{n-1} \rightarrow E \rightarrow B$  che soddisfano determinate ipotesi di orientabilità. La derivazione di tale successione richiede diversi passaggi.

Il primo passo consiste nel ricavare una versione relativa del teorema di Leray-Hirsch da quella assoluta. Prima di procedere daremo alcune definizioni necessarie per la formulazione e la dimostrazione del teorema.

**Definizione 2.2.1.** Per **coppia di fibrati** si intende il dato di un fibrato  $F \rightarrow E \xrightarrow{\bar{p}} B$  e un sottospazio  $E' \subset E$  tale che la restrizione  $p$  di  $\bar{p}$  a  $E'$  dia luogo a un fibrato  $p : E' \rightarrow B$ , con fibra  $F' \subset F$ , le cui banalizzazioni locali siano ottenute come restrizioni di quelle per  $\bar{p} : E \rightarrow B$ .

**Esempio 2.2.1.** Sia  $D^n \rightarrow E \rightarrow B$  un fibrato in dischi e sia  $E' \subset E$  l'unione delle sfere di bordo delle fibre. Allora  $(E, E')$  è una coppia di fibrati. In particolare  $p : E' \rightarrow B$  risulta essere un fibrato in sfere con fibra  $S^{n-1}$ .

**Definizione 2.2.2.** Sia  $f : X \rightarrow Y$  una mappa. Il **mapping cylinder** di  $f$  è lo spazio  $M_f$  ottenuto come quoziente di  $(X \times I) \sqcup Y$  rispetto alla relazione di equivalenza  $(x, 1) \sim f(x)$  per ogni  $x \in X$ .

**Osservazione 2.2.1.** Il mapping cylinder  $M_f$  di una mappa  $f : X \rightarrow Y$  si retrae per deformazione allo spazio  $Y$ .

**Teorema 2.2.2.** Sia  $(F, F') \rightarrow (E, E') \rightarrow B$  una coppia di fibrati tale che  $H^*(F, F'; R)$  sia un  $R$ -modulo libero finitamente generato in ogni dimensione. Supponiamo che esistano classi  $c_j \in H^*(E, E'; R)$  le cui restrizioni formano una base per  $H^*(F, F'; R)$  per ogni fibra  $(F, F')$ . Allora  $H^*(E, E'; R)$  è un  $H^*(B; R)$ -modulo libero con base  $\{c_j\}$ , e la moltiplicazione per scalare è definita da  $bc := p^*(b) \smile c$ , con  $b \in H^*(B; R)$  e  $c \in H^*(E, E'; R)$ , dove  $\smile$  è la versione relativa del prodotto cup:  $H^*(E, E') \times H^*(E) \rightarrow H^*(E, E')$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo il fibrato  $p : E' \rightarrow B$  e sia  $M_p$  il mapping cylinder di  $p$ . Sia  $\bar{E}$  lo spazio ottenuto da  $E \sqcup M_p$  identificando  $E' \times \{0\} \subset M_p$  e  $E' \subset E$ . Costruiamo il fibrato  $\bar{F} \rightarrow \bar{E} \rightarrow B$ , dove la mappa di proiezione è banalmente indotta da  $p$ . Le fibre  $\bar{F}$  risultano essere della forma  $F \cup CF'$ , dove  $CF'$  è il cono su  $F$ , ovvero lo spazio ottenuto come quoziente di  $F' \times I$  rispetto alla relazione di equivalenza  $(x, 1) \sim (y, 1)$  per ogni  $x, y \in F'$ . Si osservi che, considerando  $B$  come il sottospazio di  $\bar{E}$  a un estremo del mapping cylinder,

$\overline{E} \setminus B$  e  $M_p \setminus B$  si retraggono per deformazione a  $E$  ed  $E'$  rispettivamente. Dunque, per il teorema di escissione per la coomologia ([Hat09, pag. 201], si ha:  $H^*(\overline{E}, M_p) \cong H^*(\overline{E} \setminus B, M_p \setminus B) \cong H^*(E, E')$ . Tramite la successione esatta lunga di coomologia una tripletta ([Hat09, Teorema 4.3.]) si ottiene inoltre  $H^*(\overline{E}, M_p) \cong H^*(\overline{E}, B)$ , in quanto, per l'Osservazione 2.2.1,  $M_p$  si retrae per deformazione su  $B$ . Essendo  $B$  un retratto di deformazione di  $\overline{E}$  tramite la proiezione  $\overline{E} \rightarrow B$ , si ha:  $H^*(\overline{E}) \cong H^*(\overline{E}, B) \oplus H^*(B)$  come  $H^*(B)$ -moduli.

Siano  $\overline{c}_j \in H^*(\overline{E})$  le classi corrispondenti a  $c_j \in H^*(E, E') \cong H^*(\overline{E}, B)$  in questa somma. Le restrizioni delle classi  $\overline{c}_j$  insieme a 1 formano una base per  $H^*(\overline{F})$  in ogni fibra  $\overline{F}$ . Per la versione assoluta del Teorema 2.1.6 di Leray-Hirsch, si ha che  $H^*(\overline{E})$  è un  $H^*(B)$ -modulo libero con base  $\{1, \overline{c}_j\}$ . Ne segue che  $\{c_j\}$  è una base per l' $H^*(B)$ -modulo libero  $H^*(E, E')$ .  $\square$

Ci concentreremo ora sul caso particolare di coppie di fibrati della forma  $(D^n, S^{n-1}) \rightarrow (E, E') \rightarrow B$ , per le quali vale un importante corollario del teorema appena dimostrato.

**Definizione 2.2.3.** Sia  $(D^n, S^{n-1}) \rightarrow (E, E') \rightarrow B$  una coppia di fibrati. Una **classe di Thom** per la coppia di fibrati è un elemento  $c \in H^n(E, E'; R)$  la cui restrizione ad ogni fibra  $(D^n, S^{n-1})$  risulta un generatore di  $H^n(D^n, S^{n-1}; R) \cong R$ .

**Corollario 2.2.3.** Sia  $(D^n, S^{n-1}) \rightarrow (E, E') \rightarrow B$  una coppia di fibrati per cui esista una classe di Thom  $c \in H^n(E, E'; R)$ . Allora la mappa

$$\begin{aligned} \Phi : H^i(B; R) &\rightarrow H^{i+n}(E, E'; R) \\ \Phi(b) &= p^*(b) \smile c \end{aligned}$$

è un isomorfismo, detto **isomorfismo di Thom**.

**Osservazione 2.2.4.** È possibile ricavare una versione assoluta dell'isomorfismo di Thom definendo lo **spazio di Thom**  $T(E) := E/E'$ . Tutte le fibre  $D^n \subset E$  diventano sfere  $S^n \subset T(E)$ . Tali sfere sono a due

a due disgiunte, al di fuori di un unico punto in comune a tutte dato da  $x_0 = E'/E'$ . Una classe di Thom può essere vista come un elemento di  $H^n(T(E), x_0; R) \cong H^n(T(E); R)$  la cui restrizione risulta un generatore di  $H^n(S^n; R)$  per ogni sfera  $S^n \subset T(E)$  ottenuta come quoziente di una fibra  $D^n$ . L'isomorfismo di Thom diventa quindi  $H^i(B; R) \cong \tilde{H}^{n+i}(T(E); R)$ .

Un passo ulteriore nella costruzione della successione di Gysin consiste nel definire un concetto di orientabilità per fibrati in sfere o in dischi, che risulterà essere una condizione sufficiente per l'esistenza di una classe di Thom per la coomologia a coefficienti in  $\mathbb{Z}$ . A tale scopo descriveremo un procedimento che permette di definire equivalenze omotopiche tra fibre diverse di uno stesso fibrato. Nel seguito, dato un fibrato  $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$ , indicheremo con  $F_x$  la fibra  $p^{-1}(x)$  per  $x \in B$ .

**Osservazione 2.2.5.** Sia  $F \rightarrow E \rightarrow B$  un fibrato. Un cammino  $\gamma : I \rightarrow B$  induce un'omotopia  $G : F_{\gamma(0)} \times I \rightarrow B$  con  $G(x, t) = \gamma(t)$ . L'inclusione  $F_{\gamma(0)} \rightarrow E$  costituisce un sollevamento di  $g_0 := G(x, 0)$ , dunque, per la Proposizione 1.1.4,  $\exists \bar{G} : F_{\gamma(0)} \times I \rightarrow E$  sollevamento di  $G$ , con  $\bar{G}(F_{\gamma(0)}, t) \subset F_{\gamma(t)}$  per ogni  $t \in I$ . In particolare  $\bar{g}_1$  è una mappa  $L_\gamma : F_{\gamma(0)} \rightarrow F_{\gamma(1)}$ , che risulta essere un'equivalenza omotopica ([Hat09], Proposizione 4.61).

**Definizione 2.2.4.** Sia  $S^{n-1} \rightarrow E' \rightarrow B$  un fibrato in sfere e si consideri l'equivalenza omotopica  $L_\gamma : F_{\gamma(0)} \rightarrow F_{\gamma(1)}$  definita nell'osservazione precedente. Si dice che il fibrato è **orientabile** se  $L_\gamma^* : H^{n-1}(S^{n-1}; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{n-1}(S^{n-1}; \mathbb{Z})$  è l'identità per ogni cappio  $\gamma$  in  $B$ .

Sia  $D^n \rightarrow E \rightarrow B$  un fibrato in dischi. Si dice che il fibrato è **orientabile** se lo è il fibrato in sfere  $S^{n-1} \rightarrow E' \rightarrow B$ , con  $E'$  dato dall'unione delle sfere di bordo delle fibre  $D^n$ .

**Osservazione 2.2.6.** Sia  $D^n \rightarrow E \rightarrow B$  un fibrato in dischi e sia  $E'$  l'unione delle sfere di bordo delle fibre  $D^n$ . Per un sottospazio  $C \subset E$ , siano  $E_C$  ed  $E'_C$  i sottospazi, rispettivamente, di  $E$  ed  $E'$  che si proiettano su  $C$  tramite  $p$ . Allora le restrizioni di  $p$  ad  $E_C$  ed  $E'_C$  danno luogo a fibrati, rispettivamente,

in dischi e in sfere:  $D^n \rightarrow E_C \rightarrow C$  e  $S^{n-1} \rightarrow E'_C \rightarrow C$ . Inoltre, per costruzione,  $(D^n, S^{n-1}) \rightarrow (E_C, E'_C) \rightarrow C$  è una coppia di fibrati.

**Teorema 2.2.7.** *Sia  $D^n \rightarrow E \rightarrow B$  un fibrato in dischi orientabile, con  $B$  CW-complesso connesso. Allora la mappa  $i^* : H^i(E, E'; \mathbb{Z}) \rightarrow H^i(D_x^n, S_x^{n-1}; \mathbb{Z})$  indotta dall'inclusione è un isomorfismo per ogni fibra  $D_x^n$  con  $x \in B$  e per ogni  $i \leq n$ .*

*Dimostrazione.* Scelta una fibra  $D_x^n$ , sia  $\phi_x : H^n(D_x^n, S_x^{n-1}; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$  un isomorfismo fissato. Sia  $y \in B$  e sia  $\gamma$  un cammino in  $B$  da  $x$  a  $y$ . La composizione di  $\phi_x$  con  $L_\gamma^*$  determina un isomorfismo  $\phi_y : H^n(D_y^n, S_y^{n-1}; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ . Se vale il teorema, allora esiste un isomorfismo  $H^n(E, E'; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ , la cui restrizione ad ogni fibra  $D_y^n$  è esattamente l'isomorfismo  $\phi_y$ . Infatti l'inclusione  $(D_x^n, S_x^{n-1}) \rightarrow (E, E')$  è omotopa alla composizione di  $L_\gamma$  con l'inclusione  $(D_y^n, S_y^{n-1}) \rightarrow (E, E')$ . Tale isomorfismo  $H^n(E, E'; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$  verrà usato nella dimostrazione induttiva del teorema.

Supponiamo ora che  $B$  abbia dimensione finita  $k$  e procediamo per induzione su  $k$ . Per  $k = 0$  il teorema è banale. Sia quindi  $k > 0$  e supponiamo che il teorema valga  $\forall i < k$ . Siano  $U \subset B$  lo spazio ottenuto eliminando un punto dall'interno di ogni  $k$ -cella di  $B$  e  $V \subset B$  l'unione di tutte le  $k$ -celle aperte di  $B$ . Chiaramente  $B = U \cup V$ . Si osservi inoltre che  $U$ ,  $V$  e  $U \cap V$  si retraggono a CW-complessi di dimensione strettamente inferiore a  $k$ . Consideriamo i fibrati  $D^n \rightarrow E_U \rightarrow U$  ed  $S^{n-1} \rightarrow E'_U \rightarrow U$  e sia  $\bar{U}$  il CW-complesso a cui  $U$  si retrae. Grazie al Lemma 2.1.5, possiamo sostituire  $U$  con  $\bar{U}$  ed  $E_U$ ,  $E'_U$  con i rispettivi sottoinsiemi che proiettano su  $\bar{U}$ . Ripetendo lo stesso ragionamento per  $V$  e  $U \cap V$ , otteniamo tre fibrati in dischi che soddisfano l'ipotesi induttiva. In particolare, applicandola al fibrato su  $U \cap V$ , si ottiene  $H^{n-1}(E_{U \cap V}, E'_{U \cap V}) \cong H^{n-1}(D_x^n, S_x^{n-1}) = 0$ . In modo analogo, applicando stavolta l'ipotesi induttiva ai gruppi di coomologia in dimensione  $n$ , si ottiene che  $H^n(E_U, E'_U)$ ,  $H^n(E_V, E'_V)$ ,  $H^n(E_{U \cap V}, E'_{U \cap V})$  sono ciascuno un prodotto di tante copie di  $\mathbb{Z}$  quante sono le componenti connesse per archi dello spazio base corrispondente (rispettivamente  $U$ ,  $V$ ,  $U \cap V$ ). Consideriamo la



successione esatta di Mayer-Vietoris [Hat09, pag. 149]:

$$\cdots \rightarrow H^n(E, E') \rightarrow H^n(E_U, E'_U) \oplus H^n(E_V, E'_V) \xrightarrow{\psi} H^n(E_{U \cap V}, E'_{U \cap V}) \rightarrow \cdots$$

Per quanto appena detto, la mappa  $H^n(E, E') \rightarrow H^n(E_U, E'_U) \oplus H^n(E_V, E'_V)$  è iniettiva, in quanto il termine precedente nella successione è nullo. Dunque, per esattezza della successione, si ha  $H^n(E, E') \cong \ker \psi$ . Mostriamo ora che  $\ker \psi$  è isomorfo a  $\mathbb{Z}$  (e quindi anche  $H^n(E, E')$  lo è). Supponiamo prima di essere nel caso particolare in cui  $U$  è costituito da due componenti connesse per archi  $U_1, U_2$  e  $V$  è connesso. Per quanto detto in precedenza, si ha  $H^n(E_U) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  e  $H^n(E_V) \cong \mathbb{Z}$ . Gli elementi di  $\ker \psi$  risultano quindi essere del tipo  $(a, b) + c$ , con  $(a, b)$  e  $c$  tali che le loro immagini tramite la mappa di restrizione in  $H^n(E_{U \cap V}, E'_{U \cap V})$  siano lo stesso elemento. Essendo  $B$  connesso, si ha  $U_1 \cap V \neq \emptyset$  e  $U_2 \cap V \neq \emptyset$ . Supponiamo di aver scelto un isomorfismo  $\phi_{x_0} : H^n(D_{x_0}^n, S_{x_0}^{n-1}; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ , con  $x_0 \in U_1 \cap V$ . Applicando l'ipotesi induttiva e procedendo come illustrato nella prima parte della dimostrazione, è possibile definire un isomorfismo  $H^n(E_{U_1}, E'_{U_1}; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$  che, ristretto ad ogni fibra  $D_y^n$ , con  $y \in U_1$ , sia esattamente l'isomorfismo  $\phi_y$  indotto da  $\phi_{x_0}$  tramite  $L_\gamma^*$ . Ripetendo il ragionamento per  $U_2 \cap V$  e  $V$  è possibile definire isomorfismi  $H^n(E_{U_1 \cap V}, E'_{U_1 \cap V}; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$  e  $H^n(E_V, E'_V; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$  con la stessa proprietà. Sia infatti  $z \in U_1 \cap V$ . Se  $z$  e  $x_0$  stanno nella stessa componente connessa per archi di  $U_1 \cap V$ , allora esiste un cammino  $\eta$  tra  $x_0$  e  $z$  completamente contenuto in  $U_1 \cap V$ , e si procede esattamente come nel caso precedente usando  $L_\eta^*$ . Se  $z$  e  $x_0$  stanno in due diverse componenti connesse per archi di  $U_1 \cap V$ , si consideri un punto  $x'_0 \in U_1 \cap V$  che stia nella stessa componente connessa per archi di  $z$ . Essendo  $U_1$  connesso per archi, esiste un cammino  $\sigma$  in  $U_1$  tra  $x_0$  e  $x'_0$ . Si può quindi procedere considerando l'isomorfismo  $\phi_{x'_0}$  indotto da  $\phi_{x_0}$  tramite  $L_\sigma^*$ , per poi considerare un cammino  $\eta'$  tra  $x'_0$  e  $z$  contenuto in  $U_1 \cap V$  e ricondursi al caso precedente. Lo stesso procedimento vale per  $z \in V$ . Avendo scelto tali isomorfismi con  $\mathbb{Z}$ , è chiaro che le restrizioni di  $(a, b)$  e  $c$  ad  $H^n(E_{U \cap V}, E'_{U \cap V})$  siano, rispettivamente,  $a$  e  $c$ . Si deduce quindi che  $a = c$ . Sostituendo  $U_2$  a  $U_1$  nel procedimento appena descritto si ottiene  $b = c$ , quindi  $a = b = c$ , dunque banalmente  $\ker \psi \cong \mathbb{Z}$ .

Il caso generale si ottiene in modo immediato da quello trattato, osservando che, essendo  $B = U \cap V$  connesso, per ogni coppia di componenti connesse per archi  $X_1, X_2$  di  $U$  o  $V$ , esiste una successione finita di componenti connesse per archi, alternativamente di  $U$  e  $V$ , del tipo:  $X_1 = W_1, W_2, \dots, W_m = X_2$ , con  $W_i \cap W_{i+1} \neq \emptyset$  per ogni  $i = 0, \dots, m-1$ , per cui iterando il procedimento utilizzato si ottiene il risultato. Abbiamo quindi provato che  $H^n(E, E') \cong \mathbb{Z}$ . Per concludere la dimostrazione nel caso di un CW-complesso di dimensione finita, resta da mostrare che  $H^i(E, E') = 0$  per ogni  $i < n$ . A tale scopo consideriamo una porzione precedente della successione di Mayer-Vietoris:

$$\dots \rightarrow H^{i-1}(E_{U \cap V}, E'_{U \cap V}) \rightarrow H^i(E, E') \rightarrow H^i(E_U, E'_U) \oplus H^i(E_V, E'_V) \rightarrow \dots$$

Poiché i fibrati in dischi con spazi base  $U$ ,  $V$  e  $U \cap V$  soddisfano l'ipotesi induttiva, i due termini della successione adiacenti ad  $H^i(E, E')$  risultano nulli, quindi  $H^i(E, E') = 0$ .

Nel caso in cui  $B$  sia un CW-complesso di dimensione infinita, consideriamo il seguente diagramma, dove  $B^{n+1}$  indica l'( $n+1$ )-scheletro di  $B$ :

$$\begin{array}{ccc} H^i(E, E') & \longrightarrow & H^i(E_{B^{n+1}}, E'_{B^{n+1}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^i(D_x^n, S_x^{n-1}) & \longrightarrow & H^i(D_x^n, S_x^{n-1}) \end{array}$$

Analogamente a quanto visto nella dimostrazione del Teorema di Leray-Hirsh, essendo  $(B, B^{n+1})$  una coppia  $(n+1)$ -connessa, per il Lemma 2.1.5 si ha che anche  $(E, E_{B^{n+1}})$  ed  $(E', E'_{B^{n+1}})$  lo sono. Dunque nel diagramma le mappe orizzontali sono isomorfismi tra i gruppi di coomologia di dimensione  $i < n+1$ . Essendo la mappa verticale a destra un isomorfismo per quanto già mostrato per i CW-complessi di dimensione finita, anche la mappa  $H^i(E, E') \rightarrow H^i(D_x^n, S_x^{n-1})$  lo è  $\forall i < n+1$ .  $\square$

**Corollario 2.2.8.** *Ogni fibrato in dischi orientabile ha una classe di Thom per la coomologia a coefficienti in  $\mathbb{Z}$ .*

*Dimostrazione.* Se  $B$  è un CW-complesso connesso, dal teorema si evince immediatamente che un generatore di  $H^n(E, E') \cong H^n(D_x^n, S_x^{n-1})$  è una classe di Thom. La dimostrazione per uno spazio base  $B$  qualsiasi si ottiene tramite il fibrato pullback dato da un'approssimazione CW di  $B$ , che esiste per la Proposizione 2.1.3, esattamente come nella dimostrazione del Teorema 2.1.6.  $\square$

I risultati mostrati fino a questo punto permettono finalmente di procedere alla costruzione della successione di Gysin per un fibrato in sfere orientabile  $S^n \rightarrow E \xrightarrow{p} B$ .

**Osservazione 2.2.9.** Sia  $S^n \rightarrow E \xrightarrow{p} B$  un fibrato in sfere e sia  $M_p$  il mapping cylinder di  $p$ . Allora c'è un fibrato in dischi  $D^n \rightarrow M_p \xrightarrow{\bar{p}} B$ , dove  $\bar{p}$  è banalmente indotta da  $p$ , tale che  $(D^n, S^{n-1}) \rightarrow (M_p, E) \xrightarrow{\bar{p}} B$  sia una coppia di fibrati. Si ha inoltre che  $\bar{p}^* : H^*(B) \rightarrow H^*(M_p)$  è un isomorfismo, in quanto  $B$  è un retrato per deformazione di  $M_p$ .

**Definizione 2.2.5.** Sia  $S^n \rightarrow E \xrightarrow{p} B$  un fibrato in sfere orientabile. Consideriamo la successione esatta lunga di coomologia per la coppia  $(M_p, E)$  [Hat09, pag. 200] e l'isomorfismo  $\bar{p}^*$ :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H^n(M_p, E) & \xrightarrow{j^*} & H^n(M_p) & \longrightarrow & H^n(E) \longrightarrow H^{n+1}(M_p, E) \longrightarrow \cdots \\ & & & \nearrow \bar{p}^* & & & \\ & & H^n(B) & & & & \end{array}$$

Una **classe di Eulero** è un elemento  $e \in H^n(B)$  tale che  $e = (\bar{p}^*)^{-1}j^*(c)$ , con  $c \in H^n(M_p, E)$  classe di Thom.

**Osservazione 2.2.10.** Siano  $\Phi : H^n(B) \rightarrow H^{2n}(M_p, E)$  l'isomorfismo di Thom ed  $e = (\bar{p}^*)^{-1}j^*(c)$  una classe di Eulero. Si ha:  $\Phi(e) = \bar{p}^*(e) \smile c = j^*(c) \smile c = c \smile c$ .

**Proposizione 2.2.11.** Siano  $\Phi : H^i(B) \rightarrow H^{i+n}(M_p, E)$  l'isomorfismo di Thom ed  $e \in H^n(B)$  una classe di Eulero. Il diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & H^i(M_p, E) & \xrightarrow{j^*} & H^i(M_p) & \longrightarrow & H^i(E) \longrightarrow H^{i+1}(M_p, E) \longrightarrow \cdots \\
 & & \uparrow \Phi & & \uparrow \bar{p}^* & & \updownarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & H^{i-n}(B) & \xrightarrow{\smile^e} & H^i(B) & \xrightarrow{p^*} & H^i(E) \longrightarrow H^{i-n+1}(B) \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

è un diagramma commutativo a righe esatte.

*Dimostrazione.* La prima riga è chiaramente esatta, in quanto è una successione lunga di coomologia per la coppia  $(M_p, E)$ . Mostriamo la commutatività del quadrato contenente la classe di Eulero, in quanto il resto del diagramma risulta banalmente commutativo per costruzione del fibrato  $D^n \rightarrow M_p \xrightarrow{\bar{p}} B$ . Per  $b \in H^{i-n}(B)$ , si ha:

$$j^*\Phi(b) = j^*(\bar{p}^*(b) \smile c) = \bar{p}^*(b) \smile j^*(c) = \bar{p}^*(b) \smile \bar{p}^*(e) = \bar{p}^*(b \smile e).$$

□

La seconda riga del diagramma è detta **successione di Gysin**.

**Osservazione 2.2.12.** Essendo  $H^k(B) = 0$  per  $k < 0$ , la prima parte della successione di Gysin dà luogo ad isomorfismi:  $p^* : H^i(B) \rightarrow H^i(E)$  per  $i < n - 1$ .

## 2.3 Le dimensioni nei fibrati di Hopf: una condizione necessaria

Come già accennato, i risultati ottenuti nella prima parte di questo capitolo risultano necessari per una prima caratterizzazione dei fibrati in cui fibra, spazio base e spazio totale siano tutti costituiti da sfere. In particolare la successione di Gysin, insieme ad alcune proprietà delle proiezioni di rivestimento, per le quali si può far riferimento a [Hat09, Cap. 1] permette di dimostrare il seguente risultato:

**Proposizione 2.3.1.** Sia  $S^k \rightarrow S^m \xrightarrow{p} S^n$  un fibrato. Allora  $k = n - 1$  e  $m = 2n - 1$ .

*Dimostrazione.* • **Caso 1:**  $k = 0$ . Essendo  $S^0$  uno spazio discreto, l'Osservazione 1.1.2 assicura che il fibrato sia in questo caso una proiezione di rivestimento di grado 2, dunque regolare. Mostriamo innanzitutto che  $n = 1$ . Supponiamo per assurdo che  $n \neq 1$ . Allora  $\pi_1(S^n) = 0$ , quindi  $\text{Aut}(p) \cong \pi_1(S^n)/p_\#(\pi_1(S^m)) = 0$ . Essendo  $S^n \cong S^m/\text{Aut}(p) \cong S^m/0 = S^m$ , si ha  $n = m \neq 1$ , quindi  $\pi_1(S^n) = \pi_1(S^m) = 0$ . Sappiamo che c'è una corrispondenza biunivoca tra gli elementi della fibra e le classi laterali di  $p_\#(\pi_1(S^m)) \subset \pi_1(S^n)$ . Si ha quindi un assurdo, in quanto la fibra  $S^0$  ha due elementi, mentre l'inclusione  $p_\#(\pi_1(S^m)) \subset \pi_1(S^n)$  risulta essere banalmente  $0 \subset 0$ . Deve quindi essere  $n = 1$ , da cui  $\pi_1(S^n) = \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ . Per quanto detto in precedenza,  $p_\#(\pi_1(S^m))$  è isomorfo a un sottogruppo di  $\mathbb{Z}$  di indice 2, che pertanto non può essere il sottogruppo banale. Quindi deve essere  $\pi_1(S^m) \neq 0 \implies m = 1$ . Il fibrato è quindi  $S^0 \rightarrow S^1 \xrightarrow{p} S^1$ , e soddisfa  $k = 0 = 1 - 1 = n - 1$ ,  $m = 1 = 2 - 1 = 2n - 1$ .

- **Caso 2:**  $k \neq 0$ . Osserviamo innanzitutto che  $k \neq m$ . Se così non fosse, infatti, si avrebbe un fibrato della forma  $S^m \rightarrow S^m \xrightarrow{p} S^n$ , con  $p(S^m) = x_0 \in S^n$ . Quindi  $p$  non risulterebbe suriettiva, contraddicendo la definizione di fibrato. Consideriamo ora la successione di Gysin:

$$\dots \rightarrow 0 \xrightarrow{p^*} H^k(S^m) \rightarrow H^0(S^n) \xrightarrow{\sim^e} H^{k+1}(S^n) \xrightarrow{p^*} H^{k+1}(S^m) \rightarrow \dots$$

Essendo  $k \neq m$ , si ha  $H^k(S^m) = 0$ . Preso dunque un generatore  $a \in H^0(S^n) \cong \mathbb{Z}$ , si ha  $0 \neq a \smile e \in H^{k+1}(S^n)$ , per esattezza della successione. Dunque  $H^{k+1}(S^n) \neq 0 \implies k + 1 = n \implies k = n - 1$ .

Prendiamo ora un'altra porzione della successione di Gysin:

$$\dots \xrightarrow{p^*} H^{2n-1}(S^m) \longrightarrow H^n(S^n) \xrightarrow{\sim^e} H^{2n}(S^n) \xrightarrow{p^*} \dots$$

Osservando che  $H^n(S^n) \cong \mathbb{Z}$  e  $H^{2n}(S^n) = 0$  si ha che, preso un elemento  $a \in H^n(S^n)$  non nullo, esso appartiene a  $\ker(\smile e)$ . Quindi, per

esattezza, esiste un elemento non nullo  $\bar{a} \in H^{2n-1}(S^m)$  che viene mandato in  $a$  dall'applicazione precedente nella successione. In particolare, dunque, si ha:  $H^{2n-1}(S^m) \neq 0 \implies m = 2n - 1$ .

□



## Capitolo 3

# Invariante di Hopf e unicità dei fibrati

Per proseguire nella dimostrazione dell'unicità dei fibrati di Hopf come fibrati in cui tutti gli spazi coinvolti sono costituiti da sfere definiremo in questo capitolo un invariante di omotopia, noto come invariante di Hopf, per mappe  $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$ . Calcoleremo poi l'invariante di Hopf per la mappa di proiezione di un fibrato  $S^{n-1} \rightarrow S^{2n-1} \rightarrow S^n$ , che risulterà essere uguale a  $\pm 1$ , ed enunceremo il teorema di Adams, da cui si deduce che, per il fibrato sopra citato, necessariamente deve essere  $n = 1, 2, 4, 8$ . Daremo infine una traccia della dimostrazione di tale risultato. I contenuti descritti in questo capitolo si trovano in [Ada60], [Ada62], [AA66], [Hat03], [Hat09].

### 3.1 L'invariante di Hopf

**Definizione 3.1.1.** Sia  $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$  una mappa. Si definisce il CW-complesso  $C_f := (e^{2n} \sqcup S^n) / \sim_f = e^{2n} \sqcup_f S^n$ , dove  $e^{2n}$  è una  $2n$ -cella e  $\sim_f$  è la relazione di equivalenza data da:  $x \sim_f y \iff y = f(x)$  con  $x \in \partial D^{2n} = S^{2n-1}$ .

**Osservazione 3.1.1.** Per  $n > 1$ , si ha:  $H^k(C_f) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, n, 2n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$



**Definizione 3.1.2.** Sia  $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$  una mappa e siano  $\alpha$  e  $\beta$  generatori di  $H^n(C_f)$  e  $H^{2n}(C_f)$  rispettivamente. L'**invariante di Hopf** di  $f$  è un intero  $H(f)$  tale che  $\alpha \smile \alpha = \alpha^2 = H(f)\beta$ .

**Osservazione 3.1.2.** L'invariante di Hopf è ben definito a meno del segno. Infatti la scelta di un generatore  $\delta = -\beta$  di  $H^{2n}(C_f)$  determina un cambio di segno in  $H(f)$ .

**Osservazione 3.1.3.** Sia  $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$  una mappa con  $n$  dispari. Si ha, per la proprietà commutativa del prodotto cup,  $\alpha^2 = -\alpha^2$  per  $\alpha$  generatore di  $H^n(C_f)$ . Dunque  $\alpha^2 = 0$ , cioè  $H(f) = 0$ .

**Osservazione 3.1.4.** L'invariante di Hopf è un invariante di omotopia.

*Dimostrazione.* Prese  $f, g : S^{2n-1} \rightarrow S^n$  omotope, si ha che  $C_f$  ha lo stesso tipo di omotopia di  $C_g$ . Sia infatti  $F : S^{2n-1} \times I \rightarrow S^n$  un'omotopia tra  $f$  e  $g$  e si consideri lo spazio  $(e^{2n} \times I) \sqcup_F S^n$ . Osservando che c'è una retrazione per deformazione da  $e^{2n} \times I$  a  $(e^{2n} \times \{0\}) \cup (S^{2n-1} \times I)$ , che induce retrazioni per deformazione  $(e^{2n} \times I) \sqcup_F S^n \rightarrow C_f$  e  $(e^{2n} \times I) \sqcup_F S^n \rightarrow C_g$ , si ottiene l'equivalenza omotopica cercata tra  $C_f$  e  $C_g$ . Tale equivalenza omotopica induce un isomorfismo tra  $H^{2n}(C_f)$  e  $H^{2n}(C_g)$ , tramite il quale i generatori scelti per  $H^{2n}(C_f)$  e  $H^{2n}(C_g)$  si corrispondono (a meno del segno). Quindi  $H(f)$  dipende solo dalla classe di omotopia di  $f$ .  $\square$

**Osservazione 3.1.5.** In virtù del fatto che l'invariante di Hopf è un invariante di omotopia e ricordando la Definizione 2.1.3 si ha che, preso un elemento  $\sigma \in \pi_{2n-1}(S^n, x_0)$ , si può definire l'invariante di Hopf di  $\sigma$  come  $H(\sigma) = H(f)$ , con  $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$  tale che  $[f] = \sigma$ .

**Esempio 3.1.1.** Sia  $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$  è una mappa costante. Si vede facilmente che  $C_f \cong S^{2n} \vee S^n$ , che si retrae su  $S^n$ . Dunque  $H^{2n}(C_f) = 0$ , da cui si deduce che  $H(f) = 0$ .

Procederemo ora al calcolo dell'invariante di Hopf per un fibrato della forma  $S^{n-1} \rightarrow S^{2n-1} \xrightarrow{p} S^n$ , dimostrando la seguente proposizione:

**Proposizione 3.1.6.** *Sia  $S^{n-1} \rightarrow S^{2n-1} \xrightarrow{p} S^n$  un fibrato,  $n \neq 1$ . Allora  $H(p) = \pm 1$ .*

*Dimostrazione.* Preso  $M_p$  il mapping cylinder di  $p$ , per l'Osservazione 2.2.9, c'è una coppia di fibrati:  $(D^n, S^{n-1}) \rightarrow (M_p, S^{2n-1}) \xrightarrow{\bar{p}} S^n$ . Considerando lo spazio di Thom  $T(M_p) := M_p/(S^{2n-1} \times \{0\})$  si osservi che, collassando  $S^{2n-1} \times \{0\}$  a un punto,  $M_p$  diventa una  $2n$ -cella  $e^{2n}$  il cui bordo è identificato con  $S^n$  tramite  $p$ . Si ottiene cioè  $(e^{2n} \sqcup S^n)/\sim_p = C_p$ . La versione assoluta dell'isomorfismo di Thom risulta quindi essere  $\bar{\Phi} : H^n(S^n) \rightarrow H^{2n}(C_p)$  con  $\bar{\Phi}(b) = p^*(b) \smile c$ .

Consideriamo il diagramma commutativo a righe esatte precedentemente introdotto per ricavare la successione di Gysin (Proposizione 2.2.11):

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots \rightarrow H^{n-1}(S^{2n-1}) & \rightarrow & H^n(M_p, S^{2n-1}) & \xrightarrow{j^*} & H^n(M_p) & \rightarrow & H^n(S^{2n-1}) \rightarrow \dots \\
 & \downarrow & \uparrow \Phi & & \uparrow \bar{p}^* & & \downarrow \\
 \dots \rightarrow H^{n-1}(S^{2n-1}) & \longrightarrow & H^0(S^n) & \xrightarrow{\smile e} & H^n(S^n) & \xrightarrow{p^*} & H^n(S^{2n-1}) \rightarrow \dots
 \end{array}$$

Sia  $c \in H^n(M_p, S^{2n-1})$  un generatore. Per quanto visto nella dimostrazione del Teorema 2.2.7, essendo  $S^n$  uno spazio connesso, si ha che  $c$  è una classe di Thom. Osservando che, per  $n \neq 1$ ,  $H^{n-1}(S^{2n-1}) = H^n(S^{2n-1}) = 0$ , si deduce per esattezza che  $j^* : H^n(M_p, S^{2n-1}) \rightarrow H^n(M_p)$  è un isomorfismo. Essendo anche  $\bar{p}^*$  un isomorfismo, si può concludere che la classe di Eulero  $e = (\bar{p}^*)^{-1}j^*(c)$  è un generatore di  $H^n(S^n)$ . Ricordando l'Osservazione 2.2.10 si ha:  $\Phi(e) = c \smile c$ , con  $c$  ed  $e$  generatori di  $H^n(M_p, S^{2n-1})$  e di  $H^n(S^n)$  rispettivamente. Passando alla versione assoluta dell'isomorfismo di Thom si ottiene lo stesso risultato, con  $c$  generatore di  $H^n(C_p)$ . Essendo  $\bar{\Phi}$  un isomorfismo ed  $e$  un generatore, si ha che  $\bar{\Phi}(e) = c \smile c =: \beta$  è un generatore di  $H^{2n}(C_p)$ . Dunque, osservando che con la scelta di  $\beta' := -(c \smile c)$  al posto di  $\beta$  come generatore di  $H^{2n}(C_p)$  si sarebbe ottenuto  $c \smile c = -\beta'$ , si ottiene che  $H(p) = \pm 1$ .  $\square$

## 3.2 Il Teorema di Adams

Enunceremo ora un importante risultato, noto come teorema di Adams, dal quale, in virtù di quanto dimostrato fino a questo punto, sarà finalmente possibile dedurre l'unicità dei fibrati di Hopf.

**Teorema 3.2.1.** *Per  $n \neq 2, 4, 8$ , non esistono elementi  $\sigma \in \pi_{2n-1}(S^n)$  tali che  $H(\sigma) = 1$ .*

Per la dimostrazione del teorema, James Adams fece uso nel suo articolo del 1960, *On the non-existence of elements of Hopf invariant one*, [Ada60], di risultati sulla coomologia, definendo la cosiddetta *Adams' spectral sequence*. Una dimostrazione più semplice, che fa invece uso di una teoria coomologica basata sui fibrati vettoriali, nota come *K-teoria*, fu fornita nel 1966 dallo stesso Adams, in un articolo scritto in collaborazione con Michael Francis Atiyah ([AA66]). Dedicheremo l'ultima parte di questo capitolo alla presentazione di alcuni degli strumenti utilizzati da Adams e Atiyah in quest'ultima versione della dimostrazione, per poi delinearne una traccia. Per una trattazione più precisa riguardante fibrati vettoriali e K-teoria, si faccia riferimento a [Hat03].

Introduciamo innanzitutto il concetto di *fibrato vettoriale*, che sta alla base della definizione della K-teoria.

**Definizione 3.2.1.** Si chiama ***fibrato vettoriale*** sul campo  $\mathbb{K}$  di dimensione  $n \in \mathbb{N}$  un fibrato  $\mathbb{K}^n \rightarrow E \xrightarrow{p} B$  tale che per ogni  $x \in B$ ,  $p^{-1}(x)$  sia un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale e, preso  $U$  aperto banalizzante per  $x$ , la restrizione della banalizzazione locale  $h : p^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{K}^n$  alla fibra  $p^{-1}(x)$  sia un isomorfismo lineare tra  $p^{-1}(x)$  e  $\mathbb{K}^n$ .

**Definizione 3.2.2.** Siano  $p_1 : E_1 \rightarrow B$  e  $p_2 : E_2 \rightarrow B$  fibrati vettoriali e sia  $E_1 \oplus E_2 := \{(e_1, e_2) \in E_1 \times E_2 \mid p_1(e_1) = p_2(e_2)\}$ . La ***somma diretta*** di  $(E_1, p_1)$  ed  $(E_2, p_2)$  è il fibrato  $p : E_1 \oplus E_2 \rightarrow B$  con  $p(e_1, e_2) = p_1(e_1) = p_2(e_2)$ .

**Definizione 3.2.3.** Siano  $p_1 : E_1 \rightarrow B$  e  $p_2 : E_2 \rightarrow B$  fibrati vettoriali di dimensioni, rispettivamente,  $n_1$  ed  $n_2$ . Sia  $E_1 \otimes E_2$  l'unione disgiunta degli insiemi  $p_1^{-1}(x) \otimes p_2^{-1}(x)$ , dove il simbolo  $\otimes$  indica il prodotto tensoriale di spazi vettoriali, al variare di  $x \in B$ . Sia  $U \subset B$  aperto banalizzante sia per  $E_1$  che per  $E_2$ , e sia  $h_i : p_i^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{K}^{n_i}$  un isomorfismo fissato per  $i = 1, 2$ . Si definisce una topologia  $T_U$  su  $p_1^{-1}(U) \otimes p_2^{-1}(U)$  richiedendo che l'applicazione  $h_1 \otimes h_2 : p_1^{-1}(U) \otimes p_2^{-1}(U) \rightarrow U \times (\mathbb{K}^{n_1} \otimes \mathbb{K}^{n_2})$  sia un omeomorfismo. Si dimostra che tale topologia non dipende dalla scelta degli isomorfismi  $h_i$ . Essa è dunque ben definita su  $E_1 \otimes E_2$ , e rende tale insieme un fibrato vettoriale su  $B$ , detto **prodotto tensoriale** di  $E_1$  ed  $E_2$ .

**Definizione 3.2.4.** Siano  $p_1 : E_1 \rightarrow B$  e  $p_2 : E_2 \rightarrow B$  fibrati vettoriali. Un **isomorfismo** tra  $(E_1, p_1)$  ed  $(E_2, p_2)$  è un omeomorfismo  $g : E_1 \rightarrow E_2$  tale che  $g|_{p_1^{-1}(x)}$  sia un isomorfismo lineare tra  $p_1^{-1}(x)$  e  $p_2^{-1}(x)$  per ogni  $x \in B$ .

**Osservazione 3.2.2.** Il fibrato tangente ad una varietà differenziabile, introdotto nell'Esempio 1.1.2, è un fibrato vettoriale reale, ovvero soddisfa la definizione di fibrato vettoriale con  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

Da questo punto in avanti si considereranno solo fibrati vettoriali complessi, in cui cioè  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Si dimostra che, dato uno spazio topologico compatto puntato  $(B, b_0)$ , l'insieme  $Vect(B)$  dato dalle classi di isomorfismo di fibrati vettoriali complessi su  $B$  ha la struttura di monoide commutativo rispetto alla somma diretta di fibrati. Definiamo ora un procedimento, introdotto da Alexander Grothendieck, che permetterà di definire la K-teoria di  $B$  a partire da tale monoide.

**Definizione 3.2.5.** Sia  $(S, +)$  un monoide commutativo. Nel prodotto cartesiano  $S \times S$ , si definiscono:

- un'operazione di somma:  $(s_1, s_2) + (t_1, t_2) = (s_1 + t_1, s_2 + t_2)$ ;
- una relazione di equivalenza:  $(s_1, s_2) + (t_1, t_2) \iff \exists r \in S$  tale che  $s_1 + t_2 + r = s_2 + t_1 + r$ .

Il **gruppo di Grothendieck** di  $S$  è l'insieme quoziente  $K(S) := S \times S / \sim$ ; il suo elemento neutro è la classe costituita dalle coppie  $(s, s)$ , mentre l'inverso della classe  $[(s_1, s_2)]$  è la classe  $[(s_2, s_1)]$ .

**Definizione 3.2.6.** Sia  $(B, b_0)$  uno spazio topologico compatto puntato. La **K-teoria** di  $B$  è il gruppo di Grothendieck di  $(Vect(B), \oplus)$ , e si indica con  $K(B)$ .

Si dimostra che una mappa puntata  $f : (B, b_0) \rightarrow (C, c_0)$  induce un omomorfismo di gruppi  $f^* : K(C) \rightarrow K(B)$ . Questo permette di definire una versione ridotta della K-teoria:

**Definizione 3.2.7.** Sia  $(B, b_0)$  uno spazio topologico compatto puntato e sia  $i : b_0 \rightarrow B$  l'inclusione. La **K-teoria ridotta** di  $B$  è il ker dell'omomorfismo  $i^* : K(B) \rightarrow K(b_0)$ , e si indica con  $\tilde{K}(B)$ .

**Osservazione 3.2.3.** Sia  $(B, b_0)$  uno spazio topologico compatto puntato. Si ha:  $K(B) = \tilde{K}(B) \oplus \mathbb{Z}$ .

In particolare risulta utile al nostro scopo conoscere i gruppi di K-teoria ridotta delle sfere, classificati nella seguente proposizione:

**Proposizione 3.2.4.** Si hanno i seguenti risultati:

$$\tilde{K}(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & n \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari.} \end{cases}$$

Si noti che, per l'Osservazione 3.1.3, il Teorema 3.2.1 risulta banale per  $n$  dispari. Possiamo quindi procedere ponendo, nel seguito,  $n = 2m$ . Vi è una successione esatta corta che interessa i gruppi di K-teoria delle sfere e quello del CW-complesso  $C_f$  (Definizione 3.1.1):

**Proposizione 3.2.5.** Sia  $f : S^{4m-1} \rightarrow S^{2m}$  una mappa e si consideri la proiezione a quoziente  $\pi : C_f \rightarrow C_f/S^{2m}$ . La successione

$$0 \longrightarrow \tilde{K}(S^{4m}) \cong \tilde{K}(C_f/S^{2m}) \xrightarrow{\pi^*} \tilde{K}(C_f) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}(S^{2m}) \longrightarrow 0$$

è esatta corta e spezzante.

Quest'ultimo risultato permette di dare una definizione alternativa dell'invariante di Hopf: presi  $a \in \tilde{K}(S^{2m})$  e  $b \in \tilde{K}(S^{4m})$  generatori, siano  $\alpha, \beta \in \tilde{K}(C_f)$  tali che  $i^*(\alpha) = a$  e  $\pi^*(b) = \beta$ . Si dimostra che esiste un intero  $h(f)$  tale che  $\alpha \smile \alpha = h(f)\beta$ , e che questa definizione dell'invariante di Hopf è coerente con quella data precedentemente, ovvero  $h(f) = H(f)$ .

Un ulteriore strumento necessario alla dimostrazione del Teorema 3.2.1 è costituito dalle cosiddette **operazioni di Adams**, definite appunto da Adams in un articolo del 1962 ([Ada62]), le cui proprietà sono elencate nella Proposizione 3.2.6. Presi  $p, k \in \mathbb{N}$  ed  $\eta \in K(B)$ , scriveremo:

- $\eta^p = \eta \otimes \eta \otimes \cdots \otimes \eta$  ( $p$  volte);
- $k\eta = \eta \oplus \eta \oplus \cdots \oplus \eta$  ( $k$  volte),

dove  $\otimes$  indica l'operazione indotta su  $K(B)$  dal prodotto tensoriale di fibrati vettoriali.

**Proposizione 3.2.6.** *Esistono omomorfismi  $\Psi^k : K(B) \rightarrow K(B)$ , per ogni intero  $k > 0$ , che godono delle seguenti proprietà:*

1.  $\Psi^k \Psi^l = \Psi^l \Psi^k = \Psi^{lk}$ ;
2. se  $p$  è primo, si ha  $\Psi^p(\eta) \equiv \eta^p \pmod{p}$ , cioè  $\Psi^p(\eta) = \eta^p \oplus p\beta$  per qualche  $\beta \in K(B)$ ;
3. se  $\eta \in \tilde{K}(S^{2m})$ , si ha  $\Psi^k(\eta) = k^m \eta$ .

Procediamo ora con un'ultima proposizione, di cui il Teorema 3.2.1 è un'immediata conseguenza:

**Proposizione 3.2.7.** *Sia  $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$  una mappa, con  $n \neq 2, 4, 8$ . Allora  $a \smile a \equiv 0 \pmod{2}$  per ogni  $a \in H^n(C_f)$ .*

Osserviamo innanzitutto che, per quanto detto sull'equivalenza tra  $h(f)$  e  $H(f)$ , si può equivalentemente considerare  $a \in \widetilde{K}(S^n)$ . Si noti quindi che, per il punto 2 della Proposizione 3.2.6, ci si può ricondurre a provare che  $\Psi^2(a) \equiv 0 \pmod{2}$ . Questi due risultati preliminari pongono le basi per la dimostrazione della Proposizione 3.2.7, che risulta compiuta tramite una serie di calcoli che sfruttano le proprietà delle operazioni di Adams, per i dettagli della quale si rimanda a [AA66].

# Appendice A

## Star-algebre

Questa appendice sarà dedicata allo studio di alcuni risultati sulle star-algebre, necessari alla definizione dei due fibrati di Hopf  $S^3 \rightarrow S^7 \rightarrow S^4$  e  $S^7 \rightarrow S^{15} \rightarrow S^8$ . Gli argomenti trattati si trovano in [Ebb91] e [Har90].

### A.1 Definizioni e proprietà

**Definizione A.1.1.** Un’*algebra* su un campo  $\mathbb{K}$  è un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale  $A$  dotato di un’operazione binaria:  $\cdot : A \times A \rightarrow A$  che sia bilineare.

Un’algebra si dice:

- *associativa* se  $\cdot$  è associativa;
- *commutativa* se  $\cdot$  è commutativa.

**Definizione A.1.2.** Una *\*-algebra* è un’algebra dotata di un’isomorfismo lineare  $*$  :  $A \rightarrow A$ , detto *coniugio*, tale che:

- $*(*(a)) = a$  per ogni  $a \in A$ ;
- $*(ab) = *(b) *(a)$  per ogni  $a, b \in A$ .

Verrà utilizzata la notazione:  $\bar{a} := *(a)$ .

D’ora in avanti si considereranno algebre sul campo  $\mathbb{R}$  dei numeri reali.



**Definizione A.1.3.** Si dice che una  $*$ -algebra è **reale** se  $a = \bar{a}$  per ogni  $a \in A$ .

**Definizione A.1.4.** Si dice che una  $*$ -algebra è **normata** se:

- $a + \bar{a} \in \mathbb{R}$  per ogni  $a \in A$ ;
- $a\bar{a} = \bar{a}a$  è un numero reale strettamente positivo per ogni  $a \in A$  non nullo.

**Osservazione A.1.1.** E' immediato verificare che in una  $*$ -algebra normata si può definire una norma  $\|a\|^2 := a\bar{a}$ , e che ogni elemento non nullo ha un inverso moltiplicativo, dato da  $a^{-1} := \frac{\bar{a}}{\|a\|^2}$ .

**Esempio A.1.1.** Due primi esempi di  $*$ -algebre normate sono dati dal campo dei numeri reali  $\mathbb{R}$ , che assume banalmente la struttura di algebra su sé stesso, e da quello dei numeri complessi  $\mathbb{C}$ , visto anch'esso come  $\mathbb{R}$ -algebra. Il coniugio è dato dall'identità nel primo caso e da  $\overline{a + ib} = a - ib$  nel secondo caso. E' immediato verificare che, con tali operazioni,  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$  risultino essere  $*$ -algebre normate, commutative e associative, e che  $\mathbb{R}$  risulti inoltre reale.

**Definizione A.1.5.** Si dice che una  $*$ -algebra è **alternativa** se:

- $x(xy) = (xx)y$ ;
- $(yx)x = y(xx)$ .

$\forall x, y \in A$ .

## A.2 I quaternioni

**Definizione A.2.1.** Un **quaternione** è un oggetto della forma:

$$q = a + ib + jc + kd,$$

con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  e  $i, j, k$  simboli, legati dalle seguenti relazioni:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \quad ij = -ji = k$$

L'insieme dei quaternioni si indica con  $\mathbb{H}$ .

Si definiscono *somma* e *prodotto* di quaternioni come segue:

$$\begin{aligned} (a + ib + jc + kd) + (e + if + jg + kh) &:= (a + e) + (b + f)i + (c + g)j + (d + h)i \\ (a + ib + jc + kd)(e + if + jg + kh) &:= (ae - bf - cg - dh) \\ &+ (af + be + ch - dg)i + (ag + ce + df - bh)j + (ah + de + bg - cf)k \end{aligned}$$

Il *coniugato* di un quaternione  $q = a + ib + jc + kd$  è :

$$\bar{q} := a - ib - jc - kd.$$

**Osservazione A.2.1.** *Con le operazioni di somma, prodotto e coniugio sopra definite,  $\mathbb{H}$  ha la struttura di  $*$ -algebra normata.*

*Dimostrazione.* Il risultato si ottiene tramite calcoli diretti a partire dalle operazioni definite. Ci limitiamo a mostrare le proprietà che assicurano che  $\mathbb{H}$  sia normata, in quanto per le altre si procede in modo analogo.

$$\begin{aligned} q + \bar{q} &= (2a) + (b - b)i + (c - c)j + (d - d)k = 2a \in \mathbb{R}; \\ q\bar{q} &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + (-ab + ab - cd + cd)i + (-ac + ac - db + db)j + \\ &+ (-ad + ad - bc + bc)k = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 0. \quad \square \end{aligned}$$

Dato un quaternione  $q$  è quindi possibile, come illustrato nell'osservazione A.1.1, definirne la norma e, se  $q \neq 0$ , l'inverso moltiplicativo.

**Osservazione A.2.2.** *L'insieme dei quaternioni è un  $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale di dimensione 4, con base  $\{1, i, j, k\}$ . Spesso un quaternione verrà identificato con il vettore  $(a, b, c, d)$  delle sue coordinate rispetto a tale base.*

Al fine di mostrare le principali proprietà di  $\mathbb{H}$ , risulta utile considerarne una rappresentazione tramite matrici complesse  $2 \times 2$ .

**Proposizione A.2.3.** 1. *L'insieme  $H = \left\{ \begin{pmatrix} w & -z \\ \bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C} \right\}$  è una  $\mathbb{R}$ -sottoalgebra di  $M_2(\mathbb{C})$ , con unità  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;*

2. *l'algebra  $H$  è 4-dimensionale e associativa.*

*Dimostrazione.* 1. È banale che  $H$  sia chiuso rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Si ha inoltre:

$$\begin{pmatrix} w_1 & -z_1 \\ \bar{z}_1 & \bar{w}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2 & -z_2 \\ \bar{z}_2 & \bar{w}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_3 & -z_3 \\ \bar{z}_3 & \bar{w}_3 \end{pmatrix}$$

con  $w_3 = w_1 w_2 - z_1 \bar{z}_2$ ,  $z_3 = w_1 z_2 + z_1 \bar{w}_2$ , cioè  $H$  è chiuso anche rispetto al prodotto.

2. L'associatività deriva dall'associatività di  $M_2(\mathbb{C})$ . Una base è costituita da  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\} =: \{E, I, J, K\}$ .  $\square$

**Proposizione A.2.4.** *La mappa  $F : \mathbb{H} \rightarrow H$  definita da*

$$F((a, b, c, d)) = \begin{pmatrix} a + bi & -c - di \\ c - di & a - bi \end{pmatrix}$$

*è un isomorfismo di  $\mathbb{R}$ -algebre.*

*Dimostrazione.*  $F$  è ovviamente biunivoca e lineare. Per mostrare che è un morfismo, osserviamo che  $F(1) = E$ ,  $F(i) = I$ ,  $F(j) = J$ ,  $F(k) = K$ .

Notando, tramite semplici calcoli diretti, che  $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -E$  e  $IJ = -JI = K$ , si ottiene che le immagini di  $1, i, j, k$  tramite  $F$  soddisfano le stesse regole di moltiplicazione di  $1, i, j, k$ , quindi  $F$  è un morfismo.  $\square$

**Corollario A.2.5.** *L'algebra  $\mathbb{H}$  dei quaternioni è associativa.*

### A.3 Dai quaternioni agli ottonioni: la costruzione di Cayley-Dickinson

Data una  $*$ -algebra  $A$ , è possibile costruirne un'estensione  $A'$ , di dimensione doppia rispetto ad  $A$ , tramite una procedura standard, nota come *costruzione di Cayley-Dickinson*. Tale costruzione è quella che permette di costruire iterativamente le algebre  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$ ,  $\mathbb{O}$  a partire da  $\mathbb{R}$ .

**Definizione A.3.1.** Sia  $A$  una  $*$ -algebra. Si definisce la  $*$ -algebra  $A' := A \times A$ , con la somma definita componente per componente e il prodotto definito come segue:

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) := (a_1b_1 - \overline{b_2}a_2, a_2\overline{b_1} + b_2a_1).$$

L'elemento neutro moltiplicativo è  $1 = (1, 0)$ , mentre il coniugio è dato da  $\overline{(a_1, a_2)} := (\overline{a_1}, -a_2)$ .

Si enuncerà ora un risultato fondamentale che permette di caratterizzare le singole algebre di una sequenza di algebre ottenuta tramite la procedura di Cayley-Dickinson, la cui dimostrazione verrà tuttavia omessa in quanto esula dallo scopo di questa tesi (per una trattazione più approfondita, si può fare riferimento, ad esempio, a [Har90]).

**Teorema A.3.1.** *Sia  $A$  una  $*$ -algebra e  $A'$  la  $*$ -algebra ottenuta da  $A$  tramite la costruzione di Cayley-Dickinson. Si ha:*

1.  $A'$  è commutativa  $\iff A$  è reale;
2.  $A'$  è associativa  $\iff A$  è associativa e commutativa;
3.  $A'$  è normata  $\iff A$  è normata;
4.  $A'$  è alternativa e normata  $\iff A$  è associativa e normata.

L'algebra degli ottonioni è definita applicando la procedura di Cayley-Dickinson a quella dei quaternioni, ovvero:

**Definizione A.3.2.** Un **ottonione** è un oggetto della forma:

$$x = (q_1, q_2),$$

dove  $q_1, q_2$  sono quaternioni, la *somma* è definita componente per componente tramite quella definita per i quaternioni, e il *prodotto* è dato da:

$$(q_1, q_2)(p_1, p_2) := (q_1p_1 - \overline{p_2}q_2, q_2\overline{p_1} + p_2q_1)$$

Il *coniugato* di un ottonione  $x = (q_1, q_2)$ , è  $\bar{x} := (\overline{q_1}, -q_2)$ .

L'insieme degli ottonioni si indica con  $\mathbb{O}$ .

In particolare il punto 4. del Teorema A.3.1, applicato ai quaternioni e agli ottonioni, assicura che  $\mathbb{O}$  sia un'algebra normata (dotata dunque di inverso moltiplicativo e norma) e alternativa, condizioni cruciali per la costruzione del fibrato di Hopf di dimensione massima.

# Bibliografia

- [Ada60] J. F. Adams. On the non-existence of elements of Hopf invariant one. *Annals of Mathematics*, 72(1):20–104, 1960.
- [Ada62] J. F. Adams. Vector fields on spheres. *Annals of Mathematics*, 75(3):603–632, 1962.
- [AA66] J. F. Adams e M. F. Atiyah. K-theory and the Hopf invariant. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 17(1):31–38, 1966.
- [Ber09] M. Berger. *Geometry I*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [Ebb91] H. D. Ebbinghaus. *Numbers*. Springer Science & Business Media, 1991.
- [Eme15] J. Emery. Topics in linear algebra and its applications. <http://www.stem2.org/je/lineara.pdf>, 2015.
- [Har90] F. R. Harvey. *Spinors and calibrations*. Elsevier, 1990.
- [Hat03] A. Hatcher. Vector bundles and k-theory. <http://pi.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VB.pdf>, 2003.
- [Hat09] A. Hatcher. Algebraic topology. Cambridge University Press, 2009. URL: <https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf>.
- [Lyo03] D. W. Lyons. An elementary introduction to the Hopf fibration. *Mathematics magazine*, 76(2):87–98, 2003.
- [Wik19] Wikipedia. Tangent bundle — Wikipedia, the free encyclopedia. <http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Tangent%20bundle&oldid=914977384>, (2019).

